Poglavlje 8

APPROVED

PRIMJENA INTEGRALA (korigirano)

U ovom poglavlju:

- Određeni integrali
- Površine ravninskih likova
- Nepravi integrali

Znanstvenik od imena, a posebno matematičar, osjeća u svome radu isto kao i umjetnik; njegova je radost velika i potječe od same prirode – *Henri Poincare*.

Kao što znamo, neodređeni integral $\int f(x)dx$ predstavlja jednu novu funkciju, takozvanu primitivnu funkciju dane funkcije $y = f(x)$. Određeni integral funkcije $y = f(x)$ po intervalu $[a,b]$, koji označavamo sa $\int_a^b f(x)dx$, je jedan novi broj koji definiramo na sljedeći način.

Kao prvo, za svaki realan broj $\lambda > 0$, dani interval $[a,b]$ možemo pokriti podintervalima $[x_{k-1}, x_k]$, čija je duljina manja od danog broja $\lambda > 0$, odnosno $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}) \le \lambda$. Pritom je broj takvih podintervala sve veći, što je λ manji, i označavamo ga $n = n(\lambda)$. Prema ovome, za dani λ imamo da je:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,\quad n = n(\lambda)\,.$$

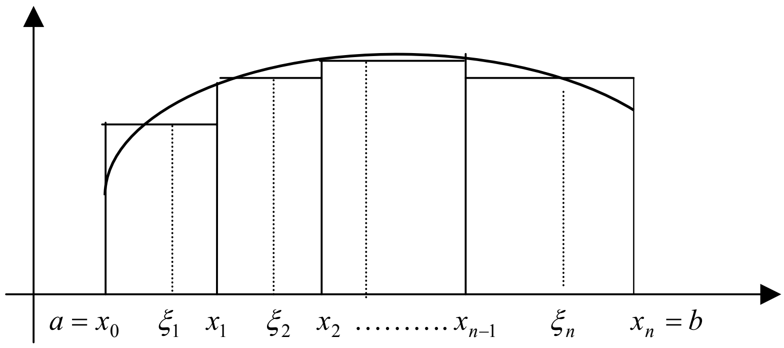
Isto tako, unutar svakog podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ možemo izabrati bilo koju točku, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, odnosno, imamo da je:

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b\,,\quad n = n(\lambda)\,.$$

Tada integral funkcije $y = f(x)$ po intervalu $[a,b]$ definiramo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n(\lambda)} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).}$$

Da bismo shvatili broj na desnoj strani u ovoj definiciji, potrebno je grafički prikazati podintegralnu funkciju zajedno sa prethodno opisanom subdivizijom intervala $[a,b]$:



Nije teško primijetiti da broj $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ predstavlja površinu pravokutnika sa stranicama $[x_{k-1}, x_k] \subseteq O_x$ i $[0, f(\xi_k)] \subset O_y$. Prema slici to znači da za veliki broj podintervala vrijedi da je broj $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ približno jednak površini lika ispod grafa funkcije $y = f(x)$. Zbog toga kažemo da je $\int_a^b f(x)dx$ površina "krivuljnog trapeza" koji je ograničen odozdo sa osi O_x, odozgo grafom funkcije $y = f(x)$ (uz pretpostavku da je $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$), te pravcima $x = a$ s lijeve i $x = b$ s desne strane.

Ovakvu konstrukciju je prvi koristio Isaac Newton.

8.1 ODREĐENI INTEGRALI

U praksi bi bilo teško rješavati određene integrale $\int_a^b f(x)dx$ preko definicije, odnosno računajući limes suma oblika $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Veliki povijesni rezultat, pomoću kojeg su neodređeni i određeni integrali dovedeni u važnu efektivnu vezu, je *Newton-Leibnizova* formula:

♣ Teorem 18. Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, te neka je $y = F(x)$ antiderivacija funkcije $y = f(x)$, odnosno $F(x) = \int f(x)dx$. Tada određeni integral po intervalu $[a,b]$ efektivno računamo po formuli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

. ♣

Prema ovome, određeni integral računamo tako da prvo nađemo odgovarajući neodređeni integral, a potom dobiveni rezultat "propustimo" kroz granice integracije.

Iz ovog fundamentalnog rezultata slijede jednostavna svojstva određenih integrala:

♣ Teorem 19. Neka su funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$ neprekidne na intervalu $[a,b]$. Tada vrijedi:

i)
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \;;$$

ii)
$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \;;$$

iii)
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \,. \clubsuit$$

Sada prelazimo na rješavanje određenih integrala koristeći Newton-Leibnizovu formulu iz gore navedenog Teorema 18.

610. $$\int_0^1 (x^2-3x+4)dx = \left|\int (x^2-3x+4)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x\right| = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Bigg|_0^1 =$$
$$= (\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4)-(\frac{0}{3}-\frac{3}{2}\cdot 0+4\cdot 0) = -\frac{7}{6}+4 = \frac{17}{6}.$$

611. $$\int_1^2 \frac{x-4}{x^3}dx = \left|\int \frac{x-4}{x^3}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 4\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right| = \left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_1^2 =$$
$$= (-\frac{1}{2}+\frac{2}{4})-(-\frac{1}{1}+\frac{2}{1}) = -1.$$

612. $$\int_0^{\pi/6} (2\cos x - 5\sin x)dx = \left|\int (2\cos x - 5\sin x)dx = 2\sin x + 5\cos x\right| = (2\sin x + 5\cos x)\Big|_0^{\pi/6} =$$
$$= (2\sin\frac{\pi}{6}+5\cos\frac{\pi}{6})-(2\sin 0+5\cos 0) = 2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-5 = -4+\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

613. $$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1-0 = 1.$$

614. $$\int_1^{e^2} \ln x dx = \left| \int \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x \right| =$$

$$= \left(x \ln x - x \right)\Big|_1^{e^2} = (e^2 \ln e^2 - e^2) - (1 \ln 1 - 1) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1 .$$

615. $$\int_0^1 \operatorname{arc\,sin} x dx = \left| \int \operatorname{arc\,sin} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arc\,sin} x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} \right| =$$

$$= \left(x \cdot \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} \right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

616. $$\int_0^4 \frac{x}{x+3} dx = \left| \int \frac{x}{x+3} dx = \left| \begin{array}{c} x+3 = t \\ dx = dt \\ x = t-3 \end{array} \right| = \int \frac{t-3}{t} dt = \int dt - 3\int \frac{dt}{t} = x + 3 - 3 \ln |x+3| \right| =$$

$$= \left(x + 3 - 3 \ln |x+3| \right)\Big|_0^4 = (7 - 3\ln 7) - (3 - \ln 3) = 4 - 3\ln 7 + 3 \ln 3 .$$

617. $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = (\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} .$$

618. $$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3} \ln^3 x \Big|_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3} .$$

619. $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{e^x - 1} = t \\ x = \ln(t^2 + 1) \\ dx = \dfrac{2t dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2 \operatorname{arc\,tg} t =$$

$$= 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^x - 1})\Big|_0^{\ln 2} = 2 - \frac{\pi}{2} .$$

620. $$\int_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1} dx = \left| \begin{array}{c} x^4 - 2x + 1 = t \\ (4x^3 - 2) dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \sqrt{(x^4 - 2x + 1)^3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} .$$

621. $$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = uv - \int v du = (-\frac{1}{x} \ln x)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^e = 1 - 2e^{-1} .$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

622. $\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt[5]{x}dx$.

623. $\int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

624. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

625. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$.

626. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

627. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

628. $\int_0^4 \frac{\ln(x+\sqrt{9+x^2})}{\sqrt{9+x^2}}dx$.

629. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$.

630. $\int_0^{\pi/2} 3^{\cos^2 x} \sin 2x dx$.

631. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

632. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

633. $\int_0^1 x \cdot \operatorname{sh} x dx$.

➢ RJEŠENJA

622. $\frac{5}{16}$. **623.** $\frac{4}{3}$. **624.** $\frac{8}{3}$. **625.** -1. **626.** 2.

627. 1. **628.** $\frac{3}{2}\ln^2 3$. **629.** $\cancel{\frac{\pi}{4}}$. **630.** $\frac{2}{\ln 3}$. **631.** $\sin 1$. **632.** $\ln 4 - 1$. **633.** e^{-1}.

Sir Isaac Newton

Rođen: 4. siječnja 1643. u Woolsthorpeu, Lincolnshire (Engleska)
Umro: 31 ožujka 1727. u Londonu (Engleska)

Newtona (Njutn) je povijest obilježila kao genija koji je nadmašio ljudsku vrstu. Poznata je njegova izreka o samom sebi:

Ne znam kako ja izgledam ljudima; ali sam sebi izgledam kao dječak koji se igra na obali mora, i zabavlja se sam sobom, pronašavši od vremena na vrijeme manji oblutak ili ljepšu školjku, dok se veliki ocean istine čitav pruža neotkriven preda mnom – Newton.

Društvena zbilja običnog i sveučilišnog života u kojoj je odrastao Newton bila je puna grozničave mržnje i tiranije, laži i nasilja, što je, za pravo čudo, imalo koristan utjecaj na karakter mladog Newtona. On je čak izjavio:

Ako sam vidio malo dalje od drugih, to je zbog toga što sam stajao na ramenima orijaša – Newton.

"Orijaši" na koje je mislio su bili: Decartes (Dekart), Kepler i Galilei:

i) od Decartesa je naslijedio analitičku geometriju;
ii) od Keplera tri osnovna zakona o kretanju planeta;
iii) od Galileija je preuzeo prva dva od tri zakona kretanja, koji su postali kameni temeljci njegove vlastite dinamike.

Poznati Newtonov zakon o svemirskoj gravitaciji kaže:

Bilo koje dvije materijalne čestice u svemiru međusobno se privlače sa snagom koja je direktno proporcionalna proizvodu njihove mase i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti među njima.

Poznata tri Newtonova zakona o kretanju:

1. *Svako će tijelo nastojati da ostane u stanju mirovanja tako dugo dok nije prisiljeno da promijeni to stanje djelovanjem sile*;
2. *Mjera promjene snage je proporcionalna djelovanju sile i događa se u pravcu u kojem djeluje sila*;
3. *Akcija i reakcija jednake su i suprotne*.

Kako vidimo, u drugom zakonu se spominje *iznos promjene*. Ispitujući *iznos promjene pokretne sile* Newton je objasnio pojam *brzine,* koja je iznos promjene položaja. Njegovo rješenje tog problema dalo mu je majstorski ključ za cijeli *diferencijalni* račun.

Kako će se izračunati ukupna udaljenost koju u danom vremenu prijeđe čestica koja se kreće i čija se brzina stalno mjenja? Odgovarajući na ovaj ili slične probleme, Newtonu je u ruke došao *integralni* račun.

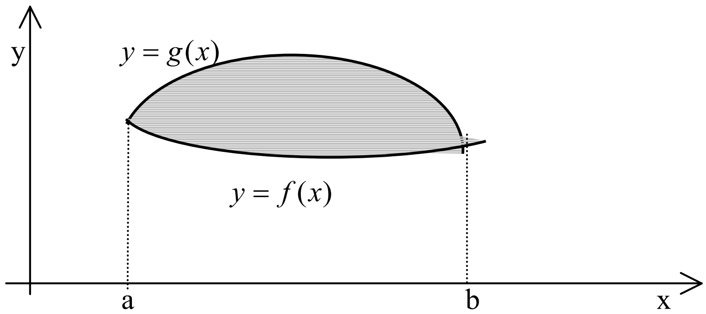
Štoviše, promatrajući zajednički dvije vrste problema, Newton je načinio fundamentalno otkriće: vidio je da su diferencijalni i integralni račun usko i recipročno vezani s onim što se danas zove *fundamentalni teorem infinitezimalnog računa* takozvana Newton-Leibnizova formula za određeni integral.

Jedno od njegovih najvećih remek-djela je zasigurno *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematički principi prirodne filozofije).

Newton je od 1701. do 1702. godine predstavljao Sveučilište Cambridge (Kembridž) u Parlamentu, a 1703. godine je izabran za predsjednika Kraljevskog društva. Na taj počasni položaj bio je stalno ponovno biran sve do svoje smrti 1727 godine. Recimo još da ga je 1705. godine kraljica Ana proglasila vitezom.

8.2 POVRŠINE RAVNINSKIH LIKOVA

Pomoću definicije određenog integrala moguće je definirati površine ravninskih likova koji su mnogo složeniji od trokuta, pravokutnika, kruga i drugih pravilnih likova u ravnini. Najopćenitiji ravninski likovi koje promatramo su takozvani «krivuljni trapezi», odnosno likovi koji su ograničeni odozgo i odozdo sa grafovima dvaju danih neprekidnih funkcija, kao na slici:



Kao što vidimo, ovaj krivuljni trapez je ograničen u smjeru O_x osi pravcima $x = a$ i $x = b$, te u smjeru O_y grafovima danih funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sada nije teško izvesti formulu za provršinu ovog krivuljnog trapeza:

♣ Teorem 20. Neka su $y = f(x)$ i $y = g(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$. Tada površinu P krivuljnog trapeza, kao na slici gore, računamo po formuli:

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

. ♣

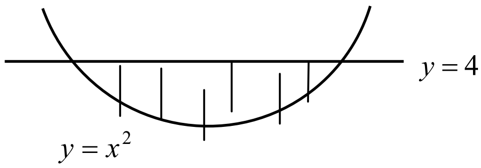
To znači da sami moramo iz teksta zadatka nacrtati dani lik te odrediti sljedeće elemente:

i) $x = a$ (lijevo po x);
ii) $x = b$ (desno po x);
iii) $y = g(x)$ (gore po y);
iv) $y = f(x)$ (dole po y).

Potom pronađene elemente uvrstimo u gornju formulu te riješimo pripadni određeni integral.

☺ 634. Naći površinu lika koji je omeđen krivuljama $y = 4$ i $y = x^2$. Slijedimo korake:

i) nacrtati svaku od danih krivulja:



ii) izračunati presječne točke od $y = 4$ i $y = x^2$:

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \ ;$$

iii) odrediti «lijevo» i «desno» po *x*: $a = -2$ i $b = 2$;

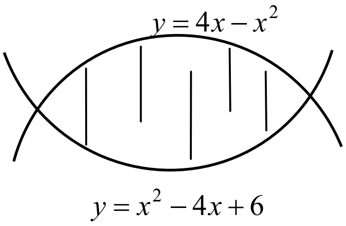
iv) odrediti «gore» i «dolje» po *y*: $f(x) = x^2$ i $g(x) = 4$;

v) računanje površine:

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

☺ 635. Naći površinu lika koji je omeđen krivuljama $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 4x + 6$.
Slijedimo korake:

i) nacrtati svaku od danih krivulja:



ii) izračunati presječne točke od $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 4x + 6$:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = 3;$$

iii) odrediti «lijevo» i «desno» po *x*: $a = 1$ i $b = 3$;

iv) odrediti «gore» i «dolje» po *y*: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ i $g(x) = 4x - x^2$;

v) računanje površine:

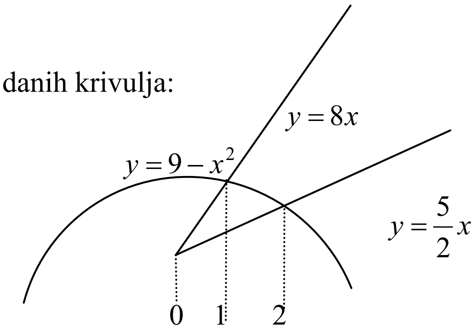
$$P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_1^3 [(4x - x^2) - (x^2 - 4x + 6)]dx = (4x^2 - \frac{2}{3}x^3 - 6x)\Big|_1^3 = \frac{8}{3}.$$

Ukoliko imamo više od dvije krivulje koje ograničavaju dani lik, tada moramo računati nekoliko površina od kojih se sastoji ukupna površina danog lika, kao u sljedećem primjeru.

😐 636. Naći površinu lika koji je omeđen krivuljama $y = 9 - x^2, x \ge 0$, $y = 8x$ i $y = \frac{5}{2}x$.

Slijedimo korake:

i) nacrtati svaku od danih krivulja:



ii) izračunati presječne točke od $y=9-x^2, x\geq 0$, $y=8x$ i $y=\frac{5}{2}x$:

$$9-x^2=8x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+8x-9=0, x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x=1,$$

$$9-x^2=\frac{5}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{5}{2}x-9=0, x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

Imamo dva područja:

iii) za prvo područje je

$a=0$, $b=1$, $f(x)=\frac{5}{2}x$ i $g(x)=8x$;

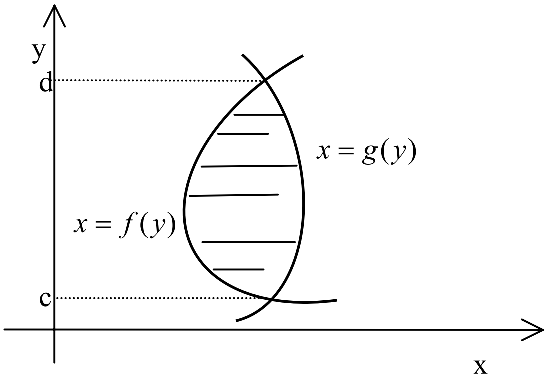
iv) za drugo područje je

$a=1$, $b=2$, $f(x)=\frac{5}{2}x$ i $g(x)=9-x^2$;

v) računanje površine:

$$P=\int_0^1(8x-\frac{5}{2}x)dx+\int_1^2[(9-x^2)-\frac{5}{2}x]dx=\frac{11}{4}x^2\Big|_0^1+(9x-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{4}x^2)\Big|_1^2=\frac{17}{3}.$$

Ponekad su krivulje koje ograničavaju dani lik zadane kao funkcije po varijabli y kao na slici:

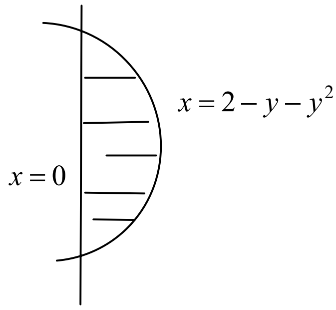


Tada površinu P ovakvog lika računamo po formuli koja je analogna Teoremu 20:

$$\boxed{P=\int_c^d(g(y)-f(y))dy.}$$

☺ 637. Naći površinu lika koji je omeđen krivuljama $x=0$ i $x=2-y-y^2$. Slijedimo korake:

i) nacrtati svaku od danih krivulja:



ii) izračunati presječne točke od $x=0$ i $x=2-y-y^2$:

$$2-y-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=-2, y_2=1;$$

iii) elementi: $c=-2$ i $d=1$, $f(y)=0$ i $g(y)=2-y-y^2$;

iv) računanje površine:

$$P=\int_c^d (g(y)-f(y))dy=\int_{-2}^{1}[(2-y-y^2)-0]dy=(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U sljedećim zadacima naći površine likova koji su ograničeni danim krivuljama:

638. $y=x^2+2x-3$ i $y=x+3$;

639. $y=2x-x^2$ i $y=-x$;

640. $y=x^2-1$, $x=2$, $x=0$ i $y=0$;

641. $y=x^2-3x-4$ i $y=-x^2+3x+4$;

642. $y=x-1$, $y=1$ i $y=\ln x$;

643. $y=e^{-x}$, $y=e^x$ i $x=1$;

644. $y=x^3-2x^2+3$, $x=2$ i $y=0$;

645. $y=x^2-3x+2$, $x=0$, $x=3$ i $y=0$;

646. $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x=1$ i $x=4$;

647. $y=x^3-2x^2$ i $y=x^2-2x$;

648. $y^2=x+1$ i $x+y=1$.

➢ RJEŠENJA

638. $\frac{125}{6}$. **639.** $\frac{9}{2}$. **640.** 2. **641.** $\frac{125}{3}$. **642.** $e-\frac{5}{2}$. **643.** $2ch1-2$. **644.** $\frac{27}{4}$.
645. $\frac{11}{6}$. **646.** $\frac{73}{6}$. **647.** $\frac{1}{2}$. **648.** $\frac{9}{2}$.

8.3 NEPRAVI INTEGRALI

Pod nepravim integralom podrazumijevamo određeni integral $\int_a^b f(x)dx$, u slučaju da vrijedi:

i) ili je bar jedna od granica jednaka beskonačnosti, odnosno $a=-\infty$ ili $b=\infty$,
ii) ili je podintegralna funkcija neograničena na intervalu $[a,b]$.

Na primjer, želimo izračunati $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ ili $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. U prvom slučaju imamo beskonačnu granicu integracije $b=\infty$, dok u drugom slučaju podintegralna funkcija $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ nije ograničena u području integracije [0,4].

♦ Definicija 4. Neka je $y=f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,\infty)$. Tada definiramo:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$$
.

Ako pripadni limes postoji, kažemo da nepravi integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *konvergira*. U suprotnom, kažemo da *divergira*. Slično, ako je $y=f(x)$ neprekidna na intervalu $(-\infty,b]$, tada definiramo:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx$$
.

Ako pripadni limes postoji, kažemo da nepravi integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *konvergira*. U suprotnom, kažemo da *divergira*. ♦

649. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^M = -\lim_{M\to\infty}(\frac{1}{M}-1) = 1.$

650. $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \ln x\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}(\ln M - \ln 1) = \infty,$ divergira.

651. $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty}(-\frac{1}{2(1+M^2)}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$

652. $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim_{M\to\infty}\sqrt{x}\Big|_2^M = \lim_{M\to\infty}(2\sqrt{M}-2\sqrt{2}) = \infty,$ divergira.

Sada prelazimo na drugi slučaj, kada su granice integracije konačne, ali je podintegralna funkcija neograničena na danom intervalu integracije.

♦<u>Definicija 5.</u> Neka je $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $(a,b]$ i neka je neograničena u lijevom rubu, odnosno $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$. Tada definiramo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to a+}\int_M^b f(x)dx$$
.

Ako pripadni limes postoji, kažemo da nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ *konvergira*. U suprotnom, kažemo da *divergira*. Slično, ako je $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b)$ i ako je neograničena u desnom rubu, odnosno $\lim_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$, tada definiramo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to b-}\int_a^M f(x)dx$$
.

Ako pripadni limes postoji, kažemo da nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ *konvergira*. U suprotnom kažemo da *divergira*. ♦

653. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to 0+}\int_M^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_M^4 = \lim_{M\to 0+}(2\sqrt{4}-2\sqrt{M}) = 4.$

654. $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{M\to 1-}\int_0^M \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{M\to 1-} -\frac{1}{x-1}\Big|_0^M = \lim_{M\to 1-}(-\frac{1}{M-1}-1) = \infty,$ divergira.

655. $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{M\to 0+}\int_M^8 x^{-2/3}dx = 3\lim_{M\to 0+} x^{1/3}\Big|_M^8 = \lim_{M\to 0+}(3\cdot 8^{1/3} - 3M^{1/3}) = 6$.

656. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{M\to 1-}\int_0^M \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{M\to 1-} \arcsin x\Big|_0^M = \lim_{M\to 1-}(\arcsin M - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$.

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

☺ 657. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

☺ 658. $\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$.

☺ 659. $\int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$.

☺ 660. $\int_1^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$.

😐 661. $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}dx$.

😐 662. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$.

☺ 663. $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3}dx$.

☺ 664. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.

😐 665. $\int_0^1 x\ln x dx$.

☺ 666. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

☹ 667. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$.

☺ 668. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx$.

😐 669. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$.

➢ RJEŠENJA

657. *divergira.*. **658.** $\frac{1}{6}$. **659.** $\frac{1}{\ln 3}$. **660.** $\frac{1}{16}$. **661.** $\frac{\pi}{\cancel{4}}$. **662.** $\frac{1}{2}$.

663. *divergira.*. **664.** 2. **665.** $-\frac{1}{4}$. **666.** $\frac{3}{2}$. **667.** $-\frac{2}{e}$.

668. $\frac{(\sqrt[3]{2})^2-1}{2}$. **669.** *divergira.*.