Prof. dr. sc. Mervan Pašić

VIDEO ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIČKE ANALIZE 1

Napisano i snimljeno po programu FER3 ✅

PREDGOVOR

U ovoj video zbirci zadataka iz Matematička analiza I se nalazi veliki broj potpuno riješenih zadataka, od kojih je 1/2 tekstualno riješena, a oko 1/2 je riješeno na pripadnom video isječku ("win-win" ili "fifty-fifty"). Video isječci se jednostavno pokreću klikom na ikonice ▶ i ▲, koje se nalaze u tekstu ispod dotičnog zadatka i problema.

"Osoba koja neće čitati nema nikakve prednosti nad osobom koja ne zna čitati" - *Mark Twain*

Za čitanje i gledanje ove video zbirke zadataka nije potrebno posebno matematičko predznanje iz srednje škole.

"Matematiku čitajte i pišite, jer tako stječete svoja iskustva. No gledajte i video materijale od drugih matematičara, jer se tako učite i na tuđim iskustvima". "Tko vjeruje u sebe da će točno riješiti neki zadatak, on to na kraju i učini" - *Profa Memi*

"When details make the difference" - Franck Bichon

SADRŽAJ:

PRVI CIKLUS ⤵️

DRUGI CIKLUS ☞ OVDJE

PRVI DIO

SKUPOVI / LOGIKA, PRIRODNI / KOMPLEKSNI BROJEVI:

3 je prirodan broj i to zapisujemo: $3 \in \mathbb{N}$

-3 je cijeli broj i to zapisujemo: $-3 \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{2}$ je racionalan broj i to zapisujemo: $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{2}$ je iracionalan broj i to zapisujemo: $\sqrt[3]{2} \in J := \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

$3 + 2i$ je kompleksan broj i to zapisujemo: $3 + 2i \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ **je skup prirodnih brojeva**

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ **je skup cijelih brojeva**

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}}$ **je skup racionalnih brojeva**

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup J$ **je skup realnih brojeva**

$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ **je skup kompleksnih brojeva**

1.1 SKUPOVI I LOGIKA - IGRA

Lijevi stupac su skupovi!

L_1 : **Skup "skuplja" svoje elemente**. $\longleftrightarrow$
Npr. $A = \{$skup studenata iz grupe PG : koji koriste laptop$\}$;

L_2 : **Dva osnovna stanja skupa**: $\longleftrightarrow$
$A = \varnothing$ tj. A je prazan i $A \neq \varnothing$ tj. A nije prazan ;

L_3 : **Komplement skupa u univerzumu U**: $\longleftrightarrow$
$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = U \backslash A$; 🔔

L_4 : **Unija dva skupa u univerzumu U**: $\longleftrightarrow$
$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B\}$; ♠

L_5 : **Presjek dva skupa u univerzumu U**: $\longleftrightarrow$
$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \in B\}$; ♣

L_6 : **De Morganovi zakoni za skupove**: $\longleftrightarrow$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ i $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A^c)^c = A$;

Desni stupac su tvrdnje (sudovi-logika)! Između ova dva različita "svijeta" vrijedi tzv. *paralelizam* i *potpuna analogija*, kao što slijedi. **Poigrajmo se malo:**

D_1 : **Sud (tvrdnja) nešto tvrdi (izriče tvrdnju)**.
Npr. $X \equiv$ "barem jedan student iz grupe PG koristi laptop";

D_2 : **Dva osnovna stanje suda (tvrdnje)**:
$X \equiv F$ tj. X je Faličan (False) i $X \equiv T$ tj. X je Točan (True) ;

D_3 : **Negacija tvrdnje (suda)**:
$\neg X \equiv$ "suprotna tvrdnja tvrdnji X" odnosno
$X \equiv T \implies \neg X \equiv F$ i $X \equiv F \implies \neg X \equiv T$; 🔔

D_4 : **Disjunkcija dvije tvrdnje**:
$X \vee Y \equiv$ "točna ako je barem jedna od tvrdnji X, Y točna" tj.:
$T \vee T \equiv T,\ T \vee F \equiv T,\ F \vee T \equiv T,\ F \vee F \equiv F$; ♠

D_5 : **Konjukcija dvije tvrdnje**:
$X \wedge Y \equiv$ "točna ako su obadvije tvrdnje X, Y točne" tj.:
$T \wedge T \equiv T,\ T \wedge F \equiv F,\ F \wedge T \equiv F,\ F \wedge F \equiv F$; ♣

D_6 : **De Morganovi zakoni za sudove**:
$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ i $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$; $\neg(\neg A) = A$.

Ako sa obostranom strelicom $\longleftrightarrow$ označimo analogiju između dvije elementarne operacije, jedna u skupu s lijeve strane i pripadna u logici s desne strane, onda korespondenciju među elementarnim operacijama među skupovima i sudovima s prethodne stranice možemo jednostavno rezimirati:

"komplement skupa" $\longleftrightarrow$ "negacija tvrdnje",
"unija dva skupa" $\longleftrightarrow$ "diskunkcija dvije tvrdnje",
"presjek dva skupa" $\longleftrightarrow$ "konjunkcija dvije tvrdnje".

Prije nego što uspostavimo ovu korespondenciju $\longleftrightarrow$ među složenijim operacijama u logici i skupovima, riješimo nekoliko zadataka. U sljedećem elementarnom zadatku namjerno istovremeno zadajemo i skupove i tvrdnje čisto da bi uočili koja je suštinska razlika među njima te analogije među njihovim operacijama.

1.1 Skupovi i logika na jednom mjestu. *Zadani su skupovi* A i B, te tvrdnje X i Y na sljedeći način:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\} \text{ i } B = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\},$$

$X \equiv$ "postoji $x \in \mathbb{R}$ td. $x^2 \geq 4$" i $Y \equiv$ "za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 \geq 4$".

Jesu li skupovi A i B neprazni te ako jesu napišimo ih u intervalnom obliku? Ispitati istinitost tvrdnji X i Y.

Očito je $A \neq \emptyset$, jer na primjer: $2^2 \geq 4 \implies 2 \in A$, te isto tako je i $B \neq \emptyset$, jer na primjer: $5 > 4 \implies 5 \in B$. Što više, $A = \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$ i $B = \langle 4, \infty\rangle$, **detalji –> *VIDEO*** ▶️.

Dokaz da postoji ljudska logika su detektivi Sherlock i Watson

Pomoću skupa A sada lako zaključujemo da je $X \equiv T$ i $Y \equiv F$. Zašto? S obzirom da se u trvdnji X pojavljuje kvantifikator "postoji" dovoljno je naći samo jedan $x \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi nejednakost $x^2 \geq 4$, a mi znamo dobro da za sve $x \in A$ ova tvrdnja vrijedi, pa specijalno i za $x = 2$. Zašto je $Y \equiv F$? U tvrdnji Y se pojavljuje kvantifikator "za svaki" pa da dokažemo da ova tvrdnja nije istinita dovoljno je naći samo jedan $x \in \mathbb{R}$ za koji ne vrijedi $x^2 \geq 4$, a takvih ima mnogo jer to su svi $x \in A^c$ odnosno za koje vrijedi $x^2 < 4$. Na primjer, $0^2 = 0 < 4 \Longrightarrow Y \equiv F$. **Q.E.D.**

1.2 *Neka su skupovi A i B kao u* **zadatku 1.1** . *Izračunati:*

$$A^c,\ A \cup B,\ A \cap B \ \text{ i } \ B^c.$$

Kako je $A = \langle -\infty, -2] \cup [2,\infty\rangle$ i $B = \langle 4,\infty\rangle$, lako se dobije:

$A^c = \langle -2,2\rangle,\ A \cup B = A,\ A \cap B = B$ i $B^c = \langle -\infty,4]$. ✌️

Sad ćemo definirati neke **složenije logičke operacije**. Među njima definitivno najpopularnija i najčešće korištena je **implikacija** $X \Longrightarrow Y$, koja se čita: "**iz** X **slijedi** Y" ili "tvrdnja X **implicira-povlači tvrdnju** Y". **Implikacija** jedino nije točna ako iz istine T impliciramo (dobijemo) laž F :

$$(T \Longrightarrow T) \equiv T, (F \Longrightarrow T) \equiv T, (F \Longrightarrow F) \equiv T, \text{ ali}$$
$$(T \Longrightarrow F) \equiv F.$$

Mnoge matematičke tvrdnje su zapisane u obliku implikacije $X \Longrightarrow Y$, gdje je X pretpostavka a Y zaključak. Postavljaju se dva pitanja čije odgovore dajemo u sljedećem zadatku: je li moguće **implikaciju prikazati pomoću osnovnih logičkih operacija** i ako jest, što je to u teoriji skupova što korespondira ($\longleftrightarrow$ u smislu prethodne stranice) s implikacijom??

1.3 *Za implikaciju vrijedi:*

$$(X \Longrightarrow Y) \equiv \neg X \vee Y,$$
$$(X \Longrightarrow Y) \longleftrightarrow A^c \cup B.$$

Dokaz na ***VIDEO-SKEČU***: ▶️

Sada pomoću **zadatka 1.3** i **De Morganovih zakona** sa **stranice 4**, nije teško dokazati **pravilo negacije implikacije**: Zaista:

1.4 *Za implikaciju vrijedi:*

$$\neg(X \Longrightarrow Y) \equiv X \wedge \neg Y.$$

$$\neg(X \Longrightarrow Y) \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv (\neg(\neg X)) \wedge \neg Y \equiv X \wedge \neg Y.$$ 😎

Primijetimo da implikacije $X \implies Y$ i $Y \implies X$ nisu logički ekvivalentne tvrdnje. Pri tome se $Y \implies X$ još zove obrat od tvrdnje $X \implies Y$. No, u slučaju da obadvije implikacije istovremeno vrijede, tada imamo **ekvivalenciju** $X \iff Y$, koju definiramo upravo na takav način:

$$X \iff Y \equiv (X \implies Y) \wedge (Y \implies X).$$

1.5 *Pokazati da je* $(T \iff T) \equiv T$ i $(F \iff F) \equiv T$, *ali :* $(T \iff F) \equiv F$ i $(F \iff T) \equiv F$.

Pokažimo na primjer da je $(T \iff F) \equiv F$:

$$(T \iff F) \equiv (T \implies F) \wedge (F \implies T) \equiv F \wedge T \equiv F.$$

Analogno se pokažu i ostali slučajevi. 🖐

Često korišteno logičko pravilo u dokazu matematičkih tvrdnji iskazanih obliku implikacije $X \implies Y$ je **obrat po kontrapoziciji**. Po ovom principu umjesto da dokazujemo $X \implies Y$ možemo ako je to lakše dokazati njoj ekvivalentnu tvrdnju, koja je iskazana u sljedećem zadatku.

1.6 *Za implikaciju vrijedi:*

$$(X \implies Y) \equiv (\neg Y \implies \neg X).$$

Dokaz na **VIDEO-SKEČU:** ▶️

Logika odnosno logičke operacije sa sudovima se mogu lijepo pomiješati s ostalim točkama iz ovog dijela gradiva, na primjer s kompleksnim brojevima. Takve zadatke promatramo u **1.4** na **35. stranici** odnosno u zadnjoj točki ovog dijela.

Ovaj potpuni sklad između skupovnih i logičkih operacija je narušen onog trena kada trebamo dokazati neku od jednakosti za skupove, jer je njen dokaz suštinski drukčiji od dokaza analogne logičke jednakosti. Na primjer, dokaz jednog od DeMorganov zakona za skupove $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ kaže da ustvari treba dokazati dvije skupovne inkluzije:

$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ i $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ pa krećemo:

$$x \in (A \cap B)^c \implies x \notin A \cap B \implies x \notin A \vee x \notin B \implies x \in A^c \cup B^c$$

i obratno:

$$x \in A^c \cup B^c \implies x \notin A \vee x \notin B \implies x \notin A \cap B \implies x \in (A \cap B)^c.$$

DOMINE 28

1.2 PRIRODNI BROJEVI - PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE - PEANOVI AKSIOMI

Skup svih prirodnih brojeva smo zadali naivnim nabrajanjem svih njegovih elemenata: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. No, jesu li na ovaj način obuhvaćeni baš svi prirodni brojevi? Kao odgovor na ovo pitanje Peano je ponudio princip potpune matematičke indukcije, koji kao način razmišljanja osigurava da možemo zadati skup prirodnih brojeva na aksiomatski način. U tu svrhu neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ priozvoljan podskup skupa $\mathbb{N}$ u koji smo stavili trenutno sve nabrojane prirodne brojeve i naravno želimo pokazati da je $M = \mathbb{N}$. Za ovo možemo koristiti sljedeći princip:

Peanovi aksiomi: neka je $1 \in M$, te neka za proizvoljni $n \in M$ slijedi da je i $n+1 \in M$. Tada je $M = \mathbb{N}$.

Ovaj princip se još zove **Princip matematičke indukcije** i koristimo ga u sljedećem slučaju: neka tvrdnja $T(n)$ ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$ te pretpostavimo da trebamo dokazati da je $T(n)$ točna za sve $n \in \mathbb{N}$. Vjerojatno ovu tvrdnju možemo pokazati i na neki drugi način, no jedan od lakših načina je zasigurno princip matematičke indukcije, koga sada ponavljamo u formi dokaza da je $T(n)$ točna za sve $n \in \mathbb{N}$:

- **baza indukcije:** $T(n)$ je točna za $n = 1$,
- **korak indukcije**: neka iz pretpostavke da je $T(n)$ točna za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je i $T(n+1)$ točna.

Tada je tvrdnja $T(n)$ točna za sve $n \in \mathbb{N}$.

Da **ovaj princip funkcionira kao efekt domina** u rušenju domina poredanih jedna pored druge, uvjerite se klikanjem na sljedeći **VIDEO:** ▶

Komentar. Za razliku od baze indukcije $T(1)$, gdje se istinitost od $T(1)$ jednostavno računski provjeri, korak indukcije je implikacija $T(n) \implies T(n+1)$, što znaći da se tvrdnja $T(n)$ pretpostavlja a $T(n+1)$ dokazuje. Zbog toga je dobro posebno napisati ono što se dokazuje a to je $T(n+1)$, koja je uglavnom neka jednakost ili nejednakost pa onda ima lijevu i desnu stranu. S kojom stranom krenuti u $T(n+1)$? Sa onom u kojoj je lakše prepoznati pretpostavku $T(n)$.

1.7 *Pokazati da za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:*

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right).$$

Prvi način (algebarski): iz srednjoškolski poznatog indetiteta

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

specijalno za $a = 1$ i $b = q$ imamo da je

$$1-q^{n+1}=(1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1}+q^n)$$

odnosno

$$1+q+\cdots+q^{n-1}+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad q\neq 1,$$

pa specijalno za $q=\frac{1}{5}$ iz ove jednakosti slijedi gornja tražena jednakosti.

Drugi način (matematička indukcija): jednakost koju dokazujemo možemo zapisati kao tvrdnju koja ovisi o prirodnom broju $n\in\mathbb{N}$:

$$T(n):\qquad 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right).$$

Provjerimo točnost tvrdnje $T(1)$ odnosno točnosti jednakosti koja nastaje iz prethodne kada se u lijevu i desnju stranu stavi za $n=1$:

$$T(1):\qquad 1+\frac{1}{5}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^2}\right).$$

Zaista, ako zasebno sredimo lijevu i desnu stranu prethodne jednakosti, tada dobivamo da je:

$$1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}\quad\text{i}\quad\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^2}\right)=\frac{6}{5},$$

čime je potvrđena istinitost od $T(1)$. Pretpostavimo sa da $T(n)$ vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$ i pomoću ove pretpostavke dokažimo da vrijedi $T(n+1)$. Da bi znali što dokazujemo, potrebno je eksplicitno zapisati ovu tvrdnju, koju dobijemo tako što se u $T(n)$ umjesto n stavi (zalijepi) $n+1$. Prema tome, dokazujemo jednakost:

$$T(n+1):\qquad 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n+2}}\right),$$

koristeći samo pretpostavku $T(n)$ i naravno uobičajene algebarske metode sređivanja izraza. Krećemo od one strane jednakosti u $T(n+1)$ u kojoj se lako prepoznaje jedna od strana iz pretpostavke $T(n)$. U ovom slučaju je to lijeva strana jednakosti:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}\right)+\frac{1}{5^{n+1}}=$$

$$= \text{koristimo pretpostavku} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) + \frac{1}{5^{n+1}} =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{5^{n+1}}\left(\frac{5}{4} - 1\right) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+2}}\right),$$

Ovime smo pokazali da je isto tako $T(n+1)$ istinita tvrdnja, a na temelju pretpostavke da je $T(n)$ istinita za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, te sada po principu matematičke indukcije slijedi da je $T(n)$ istinita tvrdnja za svaki $n \in \mathbb{N}$. **Q.E.D.**

OPREZ ⚡ **Ovo nikad ne raditi!** U dokazu da je $T(n+1)$ istinita tvrdnja, nije ispravno raditi istovremeno sa obadvije strane u $T(n+1)$ odnosno kraćenjem i dokidanjem iz $T(n+1)$ dobiti $T(n)$, što je obratni smjer od onoga koji nam treba (korak unatrag nema smisla, jer bit indukcije je korak unaprijed pa sve tako do beskonačnosti). Ovaj smjer $T(n+1) \implies T(n)$, koji je poptuni krivi, pokazujemo na prethodnom zadatku uz molbu da to nikada ne koristimo......

⚡🌧️👎✖

$$T(n+1): \qquad 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+2}}\right) \implies$$

zadnji član na lijevoj strani prebacimo na desnu stranu i sredimo je:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+2}}\right) - \frac{1}{5^{n+1}} =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \quad : T(n)\,.$$ ⚡🌧️👎✖

1.8 *Pokazati da za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:*

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

Naputak za rješavanje zadatka 1.8 Lako se u lijevoj strani od $T(n+1)$ može prepoznati lijeva strana pretpostavke $T(n)$ odnosno:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \sin(n+1)x =$$
$$= \left(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx\right) + \sin(n+1)x =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin(n+1)x = A + B,$$

gdje smo zbog jednostavnosti zapisa dobiveni rezultat obilježili kao $A+B$. Da bi završili do kraja dokaz istinitosti tvrdnje $T(n+1)$ potrebno je još pokazati da je:

$$A + B = C := \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+3)x}{2}\right),$$

gdje smo sa C zbog jednostavnosti zapisa obilježili desnu stranu od tvrdnje $T(n+1)$. No nije uopće jednostavno pokazati da je $A+B=C$, jer u A imamo kosinuse dok u B imamo sinus. Zbog toga se preporuča umjesto ove jednakosti pokazati njenu ekvivalentnu jednakost: $A - C = -B$, budući da za račun od $A - C$ je potrebno znati formulu za zbroj (razliku) kosinus funkcija. Kako to funkcionira, kliknite na sljedeći **VIDEO**: 🔺

Ne moramo krenuti od baze $n = 1$ nego od bilo kojeg prirodnog broja $n = n_0$ za koga znamo da pripadna tvrdnja $T(n_0)$ je istinita. To je zbog toga što vrijedi **poopćeni princip matematičke indukcije**: želimo pokazati da je zadana tvrdnja $T(n)$ točna za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$:

- **baza indukcije:** $T(n)$ je točna za $n = n_0$,
- **korak indukcije:** neka iz pretpostavke da je $T(n)$ točna za neki proizvoljni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ slijedi da je i $T(n+1)$ točna.

Tada je tvrdnja $T(n)$ točna za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

$$n = n_0$$ ✅

1.9 *Pokazati da za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost: $3^n > n^2$.*

Ako označimo da je $T(n): \ 3^n > n^2$, tada se lako provjeri da su tvrdnje $T(1)$ i $T(2)$ istinite jer vrijedi: $T(1): \ 3^1 > 1^2$

i $T(2): \ 3^2 > 2^2$. Zbog toga možemo staviti da je $n_0 = 3$, jer nam je tada lakše pokazati da $T(n) \implies T(n+1)$ za $n \geq 3$.

Zaista, baza indukcije se lako provjeri jer je $T(3): \ 3^3 > 3^2$. Pretpostavimo da je $T(n)$ točna za neki $n \geq 3$ i pokažimo da tada je točna i tvrdnja $T(n+1): \ 3^{n+1} > (n+1)^2$. Krećemo sa lijevom stranom u $T(n+1)$ jer je u njoj lakše prepoznati lijevu stranu od $T(n): \ 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^2$. Ovdje smo koristili da iz $a > 0$ i $3^n > n^2$ slijedi $a \cdot 3^n > a \cdot n^2$. Da bi dokazali tvrdnju $T(n+1)$ dovoljno je pokazati da je $3 \cdot n^2 > (n+1)^2$ za $n \geq 3$. Zaista,

$$3n^2 > (n+1)^2 \iff 2n^2 - 2n - 1 > 0,$$

dok zadnja nejednakost vrijedi za $n \geq 3$ jer za pripadnu kvadratnu nejednadžbu vrijedi: $2x^2 - 2x - 1 > 0$ za sve realne $x > 1 + \sqrt{3}$ pa onda specijalno i za $n \geq 3 = 1 + \sqrt{4} > 1 + \sqrt{3}$. Prema tome dokazali smo da je $T(n+1): \ 3^{n+1} > (n+1)^2$ istinita tvrdnja za $n = 1$, $n = 2$ i $n \geq 3$ odnosno za sve $n \geq 1$. **Q.E.D.**

Komentar. Primijetimo da se nejednakosti koje su se pojavile u 3. i 5. mogu generalizirati do sljedećeg poznatog pravila usporedbe veličina kao što su: $n!$, a^n i n^p. U tom smislu neka je baza $a > 1$ i eksponent $p > 0$. Tada postoji dovoljno veliki $n_0 \in \mathbb{N}$, koji ovisi o bazi a i eksponentu p, takav da vrijedi:

$$n! > a^n > n^p, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

1.10 *Pokazati da za svaki prirodni broj $n \geq 1$ vrijedi jednakost:*

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right).$$

Prvo sami pokušajte riješite **zadatak 1.10** a tek onda možete svoj postupak konzultirati sa postupkom **VIDEO:** ▶️

🎶🎵❗

U matematici za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ važnu ulogu igra broj $n!$ takozvani n **faktorijela** koga induktivno definiramo:

$0! = 1! = 1,\ 2! = 2 \cdot 1,\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1,\ n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)! \text{ za } n \geq 1.$$

Zašto se faktorijeli tako dobro slažu sa matematičkom indukcijom možemo vidjeti na sljedećem tipu zadatka?

1.11 *Pokazati da za svaki prirodni broj $n \geq 7$ vrijedi nejednakost: $n! > 4^{n-1}$.*

Primijetimo da je $7! = 5040 > 4096 = 4^6$ pa je ovime baza indukcije za $n = 7$ zadovoljena. Rješenje ovog zadatka i to na dva načina se može pogledati na **VIDEO-SKEČU:** ▶️

🅿️ A^n

Matematička indukcija je korisna i kod dokazivanja raznih matričnih jednakosti u kojima se pojavljuju **potencije nad matricama** A^n, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Pri tome se **potencija** A^n definira induktivno (rekurzivno) na potpuno isti način kao i potencija x^n, gdje je $x \in \mathbb{R}$:

$$A^0 = I, \quad A^n = A \cdot A^{n-1} \text{ za } n \geq 1.$$

Sjetimo se na trenutak kako se množe dvije matrice, evo podsjetnika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

odnosno množimo redke iz lijeve sa stupcima iz desne matrice.

Zašto se matematička indukcija slaže i sa potencijom?

1.12 Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$. Pokazati da za svaki prirodni broj $n \geq 1$ vrijedi matrična jednakost:

$$A^n = \begin{bmatrix} 7^n & 5n7^{n-1} \\ 0 & 7^n \end{bmatrix}.$$

Svoj postupak u rješavanju ovog zadatka možete usporedite sa postupkom na **VIDEO-SKEČU:** ▲

1.13 Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, gdje su realni brojevi $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Pokazati da za svaki prirodni broj $n \geq 1$ vrijedi matrična jednakost:

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & bna^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da se prethodni zadatak može generalizirati na gornje trokutastu kvadratnu matricu A s bilo kakvim matričnim elementima.

⁉ ⁉

Na kraju razriješimo odgovor na poznato pitanje: **zašto je baza indukcije važna odnosno zašto je važno provjeriti istinitost tvrdnje $T(1)$?** Kao odgovor na ovo pitanje riješit ćemo sljedeći zadatak. U tu svrhu su nam potrebni nizovi realnih brojeva, koje dataljno učimo u kasnijim poglavljima. Sad za sad, dovoljno je znati da niz realnih brojeva a_n, $n \in \mathbb{N}$, se može shvatiti kao fukcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ čija je varijabla $n \in \mathbb{N}$ sa vrijednostima u skupu $\mathbb{R}$, odnosno $a = a(n) = a_n$.

Zbog toga ima smisla ispitati je li dani niz strogo rastući ($a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) ili strogo padajući ($a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$). U sljedećem zadatku koristimo sljedeće dvije oznake:

$$T(n): \ a_n < a_{n+1} \quad \text{i} \quad P(n): \ a_n > a_{n+1} .$$

Prema tome, želimo pokazati da je $T(n)$ istina za sve $n \in \mathbb{N}$ ili je $P(n)$ istina za sve $n \in \mathbb{N}$? Naravno, očito samo jedna od njih dvije je istinita, jer ne može istovremeno niz a_n biti i strogo rastući i strogo padajući!

1.14 Neka je zadan niz realnih brojeva a_n na rekurzivni način sa: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n^3 + 5$, $n \in \mathbb{N}$, te neka su tvrdnje $T(n)$ i $P(n)$ definirane kao na prethodnoj stranici. Tada za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

– koraci indukcije: $T(n) \implies T(n+1)$ i $P(n) \implies P(n+1)$;

– baze indukcije: $T(1)$ je točna, ali $P(1)$ **nije točna**!

Prema tome, baza indukcije je odlučila da je

$T(n)$ **istina za sve** $n \in \mathbb{N}$.

Kao što vidimo, koja od ove dvije tvrdnje je točna neće odlučiti pripadni korak indukcije nego baza indukcije :)

Sljedeći zadatak je najbolje riješiti nakon **4. dijela gradiva,** u kome se radi monotonost i konvergencija nizova.
Video postupak će biti dostupan nakon što napravimo monotonost rekurzivno zadanog niza u 5. dijelu gradiva :)

1.3 KOMPLEKSNI BROJEVI

1.3.1 OSNOVNE OPERACIJE U $\mathbb{C}$

Oznake za kompleksne brojeve koje koristimo. Ako je $z \in \mathbb{C}$ i $z = x + yi = x + iy = x \cdot 1 + y \cdot i$, tada je:

- ***realni dio* od** z: $\mathrm{Re}(x + yi) = x \in \mathbb{R}$,
- ***imaginarni dio* od** z: $\mathrm{Re}(x + yi) = y \in \mathbb{R}$,
- ***konjugirano kompleksni broj* od** z: $\overline{x + yi} = x - yi$,
- ***modul ili duljina* od** z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$;

$i \in \mathbb{C}$ je ***imaginarna jedinica*** za koju vrijedi: $i^2 = i \cdot i = -1$

Algebarske operacije u $\mathbb{C}$ – Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Tada je:

- ***zbrajanje u $\mathbb{C}$***: $$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i;$$
- ***množenje u $\mathbb{C}$***: $$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i;$$
- ***potenciranje u $\mathbb{C}$***: $z^n = z \cdot z^{n-1}$, gdje je $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$;
- ***dijeljenje u $\mathbb{C}$***: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Primijetimo da je:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot \overline{x + iy} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R},$$

što je bitno različito od **kvadratne potencije**:

$$z^2 = z \cdot z = (x + yi) \cdot (x + yi) = (x^2 - y^2) + 2xyi \in \mathbb{C}.$$

Prema tome,

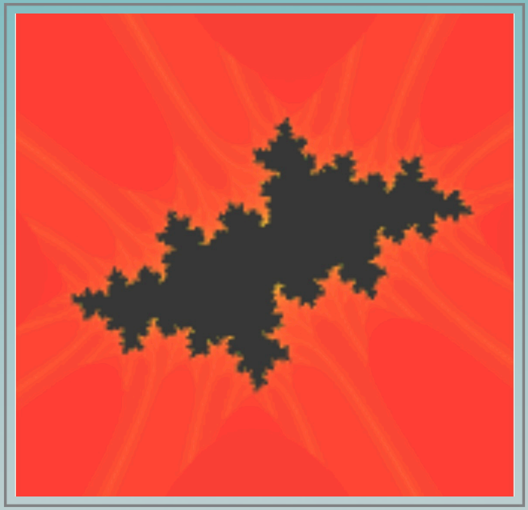
$z \in \mathbb{C}$ i $\mathrm{Im}(z) \neq 0 \Longrightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2 \neq z^2 = z \cdot z$.

Što više, $|z|^2 = z^2 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

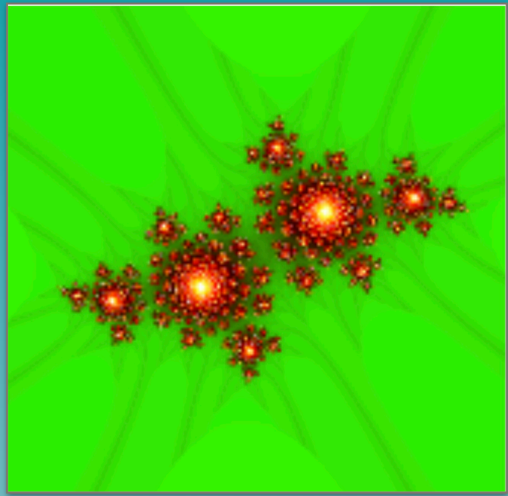
Zašto je z^2 posebno važna operaciju u $\mathbb{C}$ je pokazano na sljedećoj stranici ⤵️

Vječito pitanje je: **kako vidjeti kompleksne brojeve i pripadne operacija nad njima, kad znamo da se može vidjeti samo ono što je realno?** Kompleksni brojevi se koriste kao matematički modeli u elektromagnetizmu, gdje se ništa ne može vidjeti prostim okom. Jedini način je **geometrija fraktala u kompleksnoj ravnini**, gdje se umjesto $z = x + iy \in \mathbb{C}$ crta uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zbog realnog zora. Prvo promatramo takozvani **Juliaov skup J_c za neki konkretni** $c \in \mathbb{C}$, koji je granica skupa svih početnih $z_0 = x_0 + iy_0$ za koje pripadne **kvadratne iteracije** $z_{n+1} = z_n^2 + c$ konvergiraju u $\mathbb{C}$ (konvergencija niza u $\mathbb{R}$ je sastavni dio 5. dijela gradiva, dok konvergencija u $\mathbb{C}$ je sastavni dio gradiva matematike u 2. godini studija, za neke smjerove). Evo nekoliko konkretnih primjera:

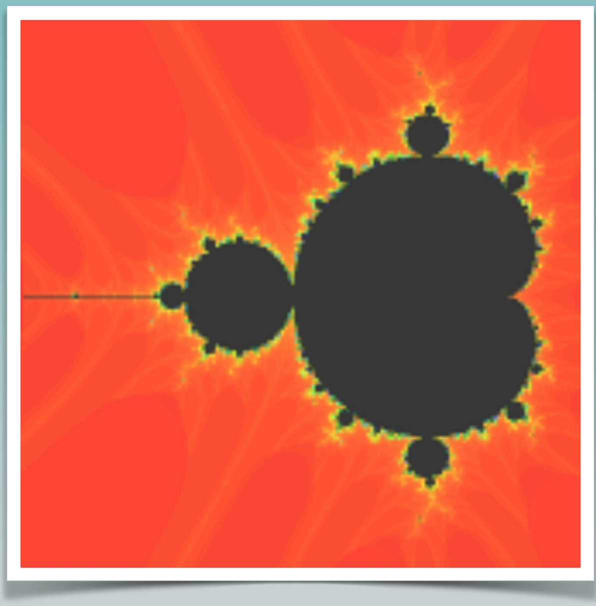
1. $c = -1 + 0 \cdot i$
   Juliaov skup J_c: u crnom (crvenom) području su oni početni $z_0 \in \mathbb{C}$ za koje iteracije $z_{n+1} = z_n^2 + c$ konvergiraju (divergiraju), dok granica tok skupa je upravo J_c:



2. $c = -0.555 + 0.494 \cdot i$
   Juliaov skup J_c:



Skup svih $c \in \mathbb{C}$ za koje pripadne **kvadratne iteracije** $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ne divergiraju se zove **Mandelbrotov skup** i na sljedećoj slici takvi $c = x + yi = (x, y)$ se nalaze u crnom području i na njegovoj granici:



U sljedećim zadacima ćemo izračunati zadane izraze, koristeći spomenute oznake i algebarske operacije u $\mathbb{C}$.

1.15 *Malo računa u* $\mathbb{C}$:

$$5(1-3i)+2\cdot\overline{3+4i}=5-15i+2(3-4i)=11-23i. \spadesuit$$

1.16 *Ne zaboravimo da je* $i^2=-1$:

$$2i^2+\mathrm{Re}(2+\sqrt{5}i)+\overline{-3-2i}=-2+2-3+2i=-3+2i.$$

1.17 *Ne zaboravimo da su realni i imaginarni dio te modul od* $z\in\mathbb{C}$ *realni brojevi :*

$$\mathrm{Im}(i+i^2)-\mathrm{Re}(\overline{5i-1})+3\,|-1+\sqrt{3}i\,|=$$

$$=\mathrm{Im}(-1+i)-\mathrm{Re}(-1-5i)+3\sqrt{(-1)^2+3}=8\,.$$

1.18 *U* $\mathbb{C}$ *isto tako možemo koristiti formulu za razliku kvadrada* $(a-b)(a+b)=a^2-b^2,\ a,b\in\mathbb{C}$:

$$(1-i)(1+i)+(2-i)(2-i)+i\cdot\mathrm{Im}(2+7i)=$$

$$=1^2-i^2+4-2i-2i+i^2+7i=5+3i.$$

Lako je izvesti i korisno je napamet znati sva **računska pravila vezano uz konjugiranje i modul kompleksnog broja** odnosno uz $\bar{z}$ i $|z|$, kao što slijedi:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2},\quad \overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}\ \text{ za } \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\overline{\alpha z_1+\beta z_2}=\alpha\overline{z_1}+\beta\overline{z_2}\ \text{ za } \alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad \overline{(\overline{z_1})}=z_1;$$

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,\quad |\alpha z|=|\alpha|\,|z|,\ \text{gdje je } \alpha\in\mathbb{R},$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad |z^n|=|z|^n,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$|\bar{z}|=|z|.$$

Kao što vidimo, za razliku od konjugiranja, modul kompleksnog broja se ne slaže tako dobro prema zbrajanju i množenju sa skalarom, kao što se slaže dobro prema množenju i dijeljenju u $\mathbb{C}$. Ova svojstva za modul ćemo jednostavnije dokazati kada umjesto **algebarskog oblika** kompleksnog broja: $z=x+iy$ budemo radili njegov **trigonometrijski oblik**: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

1.19 *Razlomak i modul umnožka:*

$$\frac{3+i}{\sqrt{3}-i}+|(\sqrt{3}-i)(-4+3i)|=$$
$$=\frac{3+i}{\sqrt{3}-i}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}+|(\sqrt{3}-i)|\cdot|(-4+3i)|=$$
$$=\frac{1}{4}(3+i)(\sqrt{3}+i)+2\cdot 5=\frac{3\sqrt{3}+39}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{4}i.$$

1.20 *Modul od razlomka i umnožka:*

$$\left|\frac{(1-2i)^3\cdot\overline{-3+4i}}{(\sqrt{3}-i)(1-i)^4}\right|=\frac{|1-2i|^3\cdot|-3-4i|}{|\sqrt{3}-i|\cdot|1-i|^4}=$$
$$=\frac{\sqrt{5^3}\cdot 5}{2\cdot\sqrt{2^4}}=\frac{5^{\frac{5}{2}}}{8}.$$

1.21 *Realni i imaginarni dio od razlomka i umnožka:*

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\Big)+\mathrm{Re}\big(i(2+i)\big)=$$
$$=\mathrm{Im}\Big(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\Big)+\mathrm{Re}(-1+2i)=$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{Im}\big((\sqrt{3}-i)(1-\sqrt{3}i)\big)-1=\frac{1}{4}\mathrm{Im}(-4i)-1=-2.$$

1.3.2 Potencije u $\mathbb{C}$

U **zadatku 1.20** nismo morali posebno izračunati što je to $z=(1-i)^4$ budući da smo tražili modul i koristili super ponašanje modula spram potencije kompleksnog broja: $|(1-i)^4|=|1-i|^4=(\sqrt{2})^4=2^2=4$. U nastavku ćemo raditi potencije kompleksnih brojeva neovisno o njihovom modulu pa ćemo trebati brzo i jednostavno i računati potencije poput $z=(1-i)^4$. Koristeći sljedeća elementarna svojstva potenciranja imaginarne jedinice:

$$i^2=-1,\ i^3=i\cdot i^2=-i,\ i^4=(i^2)^2=1,\ i^5=i\cdot i^4=i,\ \cdots$$

Iako izvedemo i napamet naučimo izraz za bilo koju potenciju imaginarne jedinice:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,$$
$$i^{4k}=(i^4)^k=1,\ i^{4k+1}=i^{4k}\cdot i=i,\ \ k\in\mathbb{N};$$
$$i^{4k+2}=i^{4k}\cdot i^2=-1,\ i^{4k+3}=i^{4k}\cdot i^3=-i\,,k\in\mathbb{N}\,.$$

Budući da se svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ može napisati u obliku

$$\frac{n}{4} = k + \frac{r}{4} \Longleftrightarrow n = 4k + r, \quad k \in \mathbb{N},\ r \in \{0,1,2,3\},$$

gdje se kako vidimo **ostatak** r lako odredi nakon što podijelimo zadani $n \in \mathbb{N}$ s četiri, pa kako je $i^{4k} = 1$, zbog toga imamo:

$$\boxed{i^n = i^{4k+r} = i^r, \quad k \in \mathbb{N},\ r \in \{0,1,2,3\}.}$$

Ovo pravilo nam također može dobro pomoći kada trebamo izračunati potencije drugih kompleksnih brojeva koji su složeniji od imaginarne jedinice $z = i$.

1.22 *Izračunati razlomak*: $\dfrac{2 \cdot i^{94} + i^{781}}{i^{428} - 3 \cdot i^{1739}}$.

$$\frac{94}{4} = 23 + \frac{2}{4} \Longleftrightarrow 94 = 4 \cdot 23 + 2 \Longrightarrow 94 = 4k + 2,$$

$$\frac{781}{4} = 195 + \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 781 = 4 \cdot 195 + 1 \Longrightarrow 781 = 4k + 1,$$

$$\frac{428}{4} = 107 + \frac{0}{4} \Longleftrightarrow 428 = 4 \cdot 107 + 0 \Longrightarrow 428 = 4k,$$

$$\frac{1739}{4} = 434 + \frac{3}{4} \Longleftrightarrow 1739 = 4 \cdot 434 + 3 \Longrightarrow 1739 = 4k + 3,$$

pa dobivamo da je:

$$\frac{2 \cdot i^{94} + i^{781}}{i^{428} - 3 \cdot i^{1739}} = \frac{2 \cdot i^{4k+2} + i^{4k+1}}{i^{4k} - 3 \cdot i^{4k+3}} = \frac{-2 + i}{1 + 3i} = \frac{-2 + i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} =$$

$$= \frac{1}{10}(-2 + i)(1 - 3i) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} i. \quad \square$$

1.23 *Pokazati da je:*

$$(1 + i)^{50} = 2^{25}\, i.$$

Prvo pokušajte sami riješite **zadatak 1.23**, koristeći da je:

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

a tek onda svoj postupak usporedite sa postupkom na **VIDEO-SKEČU:** ▶

Slično se može izračunati bilo koja potencije od broja $z = 1 + i$, gdje u pristupu postoji mala razlika ako je potencija parna ili neparna.

1.24 *Pokazati da vrijedi:*

$$(1 + i)^{2k} = 2^k\, i^k, \quad (1 + i)^{2k+1} = 2^k (i^k + i^{k+1}),$$

$$(1 - i)^{2k} = (-2)^k\, i^k, \quad (1 - i)^{2k+1} = (-2)^k (i^k - i^{k+1}), \ k \in \mathbb{N}.$$

Izrazi i^k i i^{k+1} koji se pojavljuju na desnim stranama u prethodnom zadatku se mogu izračunati samo kada je $k \in \mathbb{N}$ konkretno zadan. Svoj postupak rješavanja **zadatka 1.24** možete usporedite sa postupkom na **VIDEO-SKEČU:** ▶️

1.25 *Izračunati sljedeće potencije*:

$z_1 = (-1 - i)^{71}$ [**R:** $z_1 = -2^{35} + 2^{35} i$]

$z_2 = (-\sqrt{3} + \sqrt{3}i)^{28}$ [**R:** $z_2 = -6^{14}$]

$z_3 = (5 + 5i)^{107}$ [**R:** $z_3 = -2^{53} \cdot 5^{107} + 2^{53} \cdot 5^{107} i$]

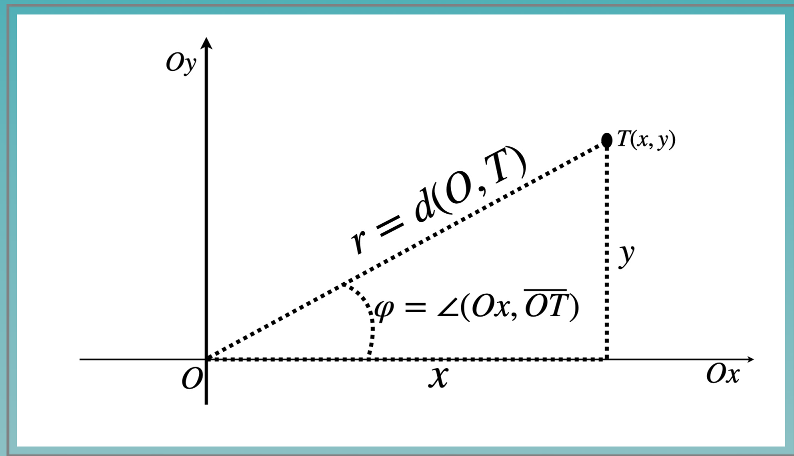
$z_4 = (2 - 2i)^{34}$ [**R:** $z_4 = -2^{51} i$] .

1.3.3 TRIGONOMETRIJSKI OBLIK

Za razliku od brojeva $z = \alpha(\pm 1 \pm i)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, mnogi drugi kompleksni brojevi nemaju tako jednostavnu kvadratnu potenciju, pa se zbog toga na računanje njihovih potencija ne može iskoristii trik iz prethodna dva zadatka. U takvim slučajevima jedino nam može pomoći **trigonometrijski oblik** kompleksnog broja:

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \geq 0, \ \varphi \in [0, 2\pi),$$

gdje realni brojevi $x, y, r, \varphi \in \mathbb{R}$ imaju svoju geometrijsku definiciju, koja je dana na slici:



Također sa slike lako možemo izvesti sve veze između (x, y) i (φ, r) koordinata jedne proizvoljno dane točke:

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Iz prethodnih veza i činjenice u kojem se kvadrantu nalazi dani kompleksni broj možemo pokazati kako se efikasno dani klompleksni broj u **algebarskom obliku** $z = x + yi$ može prebaciti u željeni **trigonometrijski oblik** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Zbog toga toga možemo napisati tablicu u kojoj se pojavljuju najčešće korišteni kompleksni brojevi zajedno s njihovim trogonometrijskim oblikom:

I. *kvadrant*: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: **VIDEO** ▶

$z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$,

$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$z = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

OPREZ: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **nije trigonometrijski oblik kompleksnog broja z, jer sadrži "$-i$" umjesto "$+i$" .**
Što je ispravno? Vidjeti dolje **zadatak 1.34** .

II. *kvadrant*: $x \leq 0,\ y \geq 0,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: **VIDEO** ▲

$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,

$z = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

$z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$,

$z = -i = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$;

III. *kvadrant*: $x \leq 0,\ y \leq 0,\ \varphi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$: **VIDEO** ▶

$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$,

$z = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$,

$z = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$z = -i = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

IV. *kvadrant*: $x \geq 0,\ y \leq 0,\ \varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$: **VIDEO**

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$$

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Svi kvadranti na jednom mjestu - rezime: **VIDEO**

Prednosti **trigonometrijskog oblika** kompleksnog broja u odnosu na njegov **algebarski oblik** se očituje u sljedećim formulama za množenje, potenciranje i dijeljenje kompleksnih brojeva:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big);$$

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ i } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\implies$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

U nekoliko sljedećih zadataka ćemo izvježbati ove formule, te istovremeno i prebacivanje kompleksnog broja iz algebarskog u trigonometrtijski oblik. Isto tako, budući da u $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vrijedi: $r \geq 0,\ \varphi \in [0,2\pi)$, to u prethodnim formulama, u njenim desnim stranama trebamo "premotati" one dobivene kuteve $n\varphi,\ \varphi_1+\varphi_2,\ \varphi_1-\varphi_2$ u interval $\varphi \in [0,2\pi)$ a koji su iskočili iz ovog intervala. Pri tome koristimo **periodičnost trigonometrijskih funkcija** odnosno:

$$\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Na primjer, nije dobro napisati konačni rezultat u obliku:

$$z = \cos\frac{79\pi}{4} + i\sin\frac{79\pi}{4},$$

jer kut $\frac{79\pi}{4}$ nije unutar intervala $[0,2\pi)$, pa je stoga nužno napraviti: **VIDEO**

$$\cos\frac{79\pi}{4} + i\sin\frac{79\pi}{4} = \cos\left(18\pi + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(18\pi + \frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

1.26 *Izračunajmo zadani razlomak u $\mathbb{C}$:*

$$\frac{(-\sqrt{3}-i)^{18}}{(-1+\sqrt{3}i)^{15}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^{18}}{\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{15}} =$$

$$= 2^{18-15}\left[\cos\left(18\cdot\frac{7\pi}{6}-15\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(18\cdot\frac{7\pi}{6}-15\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2^3\Big(\cos(11\pi)+i\sin(11\pi)\Big) =$$

$$= 2^3\Big(\cos(\pi+10\pi)+i\sin(\pi+10\pi)\Big) =$$

$$= 2^3(\cos\pi+i\sin\pi) = -2^3 .$$

Ako želimo uštediti prostora na papiru, onda možemo koristiti sljedeću lokalnu skraćenicu u pisanju:

$$\mathrm{cis}(\varphi) := \cos(\varphi)+i\sin(\varphi). ☺$$

Tada je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot\mathrm{cis}(\varphi)$, gdje prvo slovo "**c**" dolazi od "cos", drugo "**i**" dolazi od imaginarne jedinice, te treće slovo "**s**" dolazi od "sin". Prema tome, pravila za potenciranje, množenje i djeljenje u $\mathbb{C}$ možemo zapisati i u najkraćem obliku:

$$z = r\cdot\mathrm{cis}(\varphi) \implies z^n = r^n\cdot\mathrm{cis}(n\varphi)\,;$$

$$z_1 = r_1\cdot\mathrm{cis}(\varphi_1) \ \text{ i } \ z_2 = r_2\cdot\mathrm{cis}(\varphi_2) \implies$$

$$z_1z_2 = r_1r_2\cdot\mathrm{cis}(\varphi_1+\varphi_2) \ \text{ i } \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\mathrm{cis}(\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

1.27 *Velike potencije i množenje u $\mathbb{C}$:*

$$(5+5\sqrt{3}i)^{133}\cdot(-1+i)^{79} = 5^{133}(1+\sqrt{3}i)^{133}\cdot(-1+i)^{79} =$$

$$= 5^{133}\cdot 2^{133}\cdot\left(\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}\right)^{133}\cdot(\sqrt{2})^{79}\cdot\left(\mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}\right)^{79} =$$

$$= 5^{133}\cdot 2^{133}\cdot(\sqrt{2})^{79}\cdot\mathrm{cis}\left(133\cdot\frac{\pi}{3}+79\cdot\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 10^{133}\cdot 2^{\frac{79}{2}}\cdot\mathrm{cis}\left(\frac{1243\pi}{12}\right) = 10^{133}\cdot 2^{\frac{79}{2}}\cdot\mathrm{cis}\left(102\pi+\frac{19\pi}{12}\right) =$$

$$= 10^{133}\cdot 2^{\frac{79}{2}}\cdot\mathrm{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right) = 10^{133}\cdot 2^{\frac{79}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).$$

Kao što vidimo **rezultat se ne smije zapisati u obliku** $\mathrm{cis}(\varphi)$ nego ili u algebarskom ili u trigonometrijskom obliku. Mi smo ga zapisali u trigonometrijskom obliku što je ok, budući ga ne znamo prebaciti u algebarski bez upotrebe kalkulatora, a to je upravo situacija na ispitima.

1.28 *Izračunajmo imaginarni dio zadanog razlomka*:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{(7-7i)^{17}(\sqrt{3}+i)^{49}}{(-1-\sqrt{3}i)^{25}}\right) = 7^{17}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{(1-i)^{17}(\sqrt{3}+i)^{49}}{(-1-\sqrt{3}i)^{25}}\right) =$$

= [* koristili smo: $\mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha \mathrm{Im}(z)$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ *] =

$$= 7^{17}\cdot\mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{2}^{17}\mathrm{cis}\left(17\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\cdot 2^{49}\mathrm{cis}\left(49\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{2^{25}\,\mathrm{cis}\left(25\cdot\frac{4\pi}{3}\right)}\right] =$$

$$= 7^{17}\frac{\sqrt{2}^{17}\cdot 2^{49}}{2^{25}}\cdot\mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\left(17\cdot\frac{7\pi}{4}+49\cdot\frac{\pi}{6}-25\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 7^{17}2^{\frac{17}{2}+24}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\left(\frac{55\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 7^{17}2^{\frac{65}{2}}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\left(4\pi+\frac{7\pi}{12}\right)\right) = 7^{17}2^{\frac{65}{2}}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 7^{17}2^{\frac{65}{2}}\,\mathrm{Im}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = 7^{17}2^{\frac{65}{2}}\,\sin\frac{7\pi}{12}\,.$$

U jednoj od prethodnih jednakosti smo koristili periodičnost (podsjeti se na **24. stranicu**):

$$\mathrm{cis}(2k\pi+\varphi) = \mathrm{cis}(\varphi),\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Primjetimo da se lako dokaže da je

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = 1.\ ✅$$

Koristeći ovaj identitet, te svojstva za potenciranje, množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku
- **25. stranica** te jednostavni identitet $|\alpha z| = |\alpha||z|$, $\alpha\in\mathbb{R}$
- **19. stranica** , lako se može napraviti sljedeći zadatak.

1.29 *Pokazati da vrijedi:* **VIDEO** ▶

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\ |z^n| = |z|^n\,,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,.$$

1.3.4 Korjenovanje u $\mathbb{C}$

Kada rješavamo jednadžbu $x^3+1=0$ u skupu realnih brojeva, odnosno kada tražimo sve $x \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju ovu jednadžbu tada sljedeći račun "kaže":

$$x^3+1=0 \Longleftrightarrow x^3=-1 \Longleftrightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$$

da ova jednadžba ima samo jedno realno rješenje $x=-1$. Međutim, kada ovu istu jednadžbu rješavamo u skupu kompleksnih brojeva, tada je zapisujemo kao $z^3+1=0$, tada primjenom istog postupka dobivamo da ona ima tri kompleksna rješenja:

$$z^3+1=0 \Longleftrightarrow z^3=-1 \Longleftrightarrow z=\sqrt[3]{-1} \Longrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_2=-1, \\ z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,. \end{cases}$$

Prvo ćemo provjeriti da su ovo zaista rješenja odnosno da zadovoljavaju identitet $z^3=-1$:

$$z_1^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3=\operatorname{cis}\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}(\pi)=-1,$$

$$z_2^3=(-1)^3=-1,$$

$$z_1^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^3=\operatorname{cis}\left(3\cdot\frac{5\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}(5\pi)=-1.$$

Prema tome z_1, z_2 i z_3 su zaista tri različita rješenja jednadžbe $z^3+1=0$, a postupak rješavanja je bio isti kao kod jednadžbe $x^3+1=0$, sa jednom suštinskom razlikom: **treći korijen od -1 u skupu $\mathbb{R}$ ima točno jedno rješenje dok u skupu $\mathbb{C}$ ima točno 3 rješenja,** iako su isto definirani:

$$x=\sqrt[3]{a} \Longleftrightarrow x^3=a\text{ , gdje su } x,a\in\mathbb{R};$$
$$z=\sqrt[3]{w} \Longleftrightarrow z^3=w\text{ , gdje su } z,w\in\mathbb{C}.$$

Zašto se ovo dešava je objašnjeno u **VIDEO-SKEČU▲**

Općenito, n-ti korijen nekog kompleksnog broja $w\in\mathbb{C}$ ima istu definiciju kao n-ti korijen nekog realnog broja $a\in\mathbb{R}$:

$$x=\sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow x^n=a\text{ , gdje su } x,a\in\mathbb{R};$$
$$z=\sqrt[n]{w} \Longleftrightarrow z^n=w\text{ , gdje su } z,w\in\mathbb{C}.$$

Izvrsna vijest: ako je $z \in \mathbb{C}$ zadan u trigonometrijskom obliku, tada njegov $\sqrt[n]{z}$ **ima točno** n **različitih rješenja**, koja su dana jednom jedinstvenom formulom (za jednostavan dokaz ove formule pogledati **VIDEO** ▶️):

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1,$$

gdje u ovu formulu uvrštavamo n različitih prirodnih brojeva $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$. Ako bi uvrstili ostale vrijedosti za $k \in \mathbb{Z}$, zbog periodičnosti od funkcija $\cos x$ i $\sin x$ dobili bi iste one $\sqrt[n]{z}$ koje smo već dobili za $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$. Zbog toga $\sqrt[n]{z}$ **ima točno** n **različitih rješenja, niti manje niti više** 😎 .

Na prethodnoj stranici smo jednostavno napisali sva rješenja jednadžbe $z^3 + 1 = 0$ odnosno $z^3 = -1$, dok smo sada u mogućnosti to i izračunati zahvaljujući gornjoj formuli:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$

$$= \sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\quad k = 0,1,2.$$

Uvijek smo dužni zasebno napisati svaki od korijena za svaki od ponuđenih vrijednosti broja $k \in \{0,1,2\}$:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = -1 \ \text{ i } \ z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

što je identično s onime što smo tvrdili i provjerili na prethodnoj stranici.

1.30 *Naći sva rješenja $z \in \mathbb{C}$ jednadžbe:*

$$z^4 + \sqrt{3} - i = 0\,.$$

Budući da je z^4 jedini nepoznati član u ovoj jednakosti, to otvaramo zadatak na ovaj način:

$$z^4 + \sqrt{3} - i = 0 \iff z^4 = -\sqrt{3} + i \iff z = \sqrt[4]{-\sqrt{3} + i}\,.$$

Budući da možemo naći trigonometrijski oblik od $-\sqrt{3} + i$ to možemo primijeniti gornju formulu za korjenovanje u $\mathbb{C}$:

$$z = \sqrt[4]{-\sqrt{3} + i} \implies z = \sqrt[4]{2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right),\ k \in \{0,1,2,3\}\,.$$

Prema tome našli smo 4 rješenja koja moramo zasebno napisati (z_1 za $k=0$, z_2 za $k=1$, z_3 za $k=2$ i z_4 za $k=3$):

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{24} + i \sin \frac{17\pi}{24} \right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{29\pi}{24} + i \sin \frac{29\pi}{24} \right),$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{41\pi}{24} + i \sin \frac{41\pi}{24} \right).$$

Budući da bez upotrebe kalulatora neznamo izračunati kosinus i sinus od ovih kuteva, rješenja ostavljamo u ovakvom (trigonometrijskom) obliku.

Kao što vidimo u prethodnom zadatku, kao i u motivaciji za računanje $z = \sqrt[3]{-1}$, korjenovanje u $\mathbb{C}$ se uglavnom pojavljuje kod rješavanja pripadnih algebarskih jednadžbi u $\mathbb{C}$. Takvi zadaci su popularni i na ispitima čime se bavi sljedeća grupa zadataka.

1.31 **Zimski ispitni rok 15.02.2021.**

U skupu $\mathbb{C}$ riješiti jednadžbu:

$$(z+i)^2 + 1 = 0\,.$$

[**R:** I. način bez korjenovanja: **VIDEO** ▶️];

[**R:** II. način uključuje korjenovanje: **VIDEO**🔺];

[**R:** III. način bez korjenovanja: **VIDEO** ▶️].

OPREZ ⚡**Ovo nikad ne raditi!** Po analogiji sa realnim brojevima, gdje je $\sqrt[n]{x^n} = x$, za $x \geq 0$, često se napravi kračenje potencije korjenom u $\mathbb{C}$, što je greška sljedećeg tipa:

$$z^2 = i^6 \implies z = \sqrt{i^6} = i^{\frac{6}{2}} = i^3 = -i\,,\ \text{Neee} ⚡.$$

Zašto nije ispravno kratiti potencije na desnoj strani ćemo pokazati u sljedećem zadatku?

1.32 *Pokažimo da:*

$$z^2 = i^6 \implies z_1 = i,\ z_2 = -i\,.$$

Naime,

$$z^2 = i^6 \implies z = \sqrt{i^6} = \sqrt{-1} =$$

$$= \sqrt{1}\sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2},$$

gdje je $k \in \{0,1\}$. Prema tome:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\,.$$

Sada ova razmatranja možemo primijeniti na zadatak s ispita.

1.33 **Jesenski ispitni rok 04.09.2019.**

Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi:

$$z^6 = (2+2i)^2\,.$$

[**R:** $z_k = \sqrt{2}\Big(\cos\big(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\big)\Big)$,

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$ **VIDEO** ▶️ .

Tko za svaki ovakav k posebno napiše svih šest rješenja $z_1, z_2, \ldots, z_6$ dobiva još 1 bod. Vrijedi truda!]

1.3.5 Definicija argumenta i njegove primjene

Argument danog kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je pojam koji se vezuje uz njegov trigonometrijski oblik $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je $r \geq 0,\ \varphi \in [0,2\pi)$. Mi znamo da zbog periodičnosti od funkcija $\cos x$ i $\sin x$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ mora vrijediti:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\big(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\big).$$

No zbog jednostavnosti i dogovora u $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ne pišemo $\varphi + 2k\pi$ nego samo onaj osnovni kut $\varphi \in [0,2\pi)$. U praksi je dobro umjesto φ pisati i kompleksni broj koji se vezuje uz taj kut (čisto prisvajanje). Na primjer, umjesto da pišemo da je kut $\varphi = \pi/4$ **kut - argument** od $z = 1 + i$ to možemo jednostavnije simbolički naznačiti kao: $\arg(1+i) = \pi/4$ ili još preciznije:

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

ili još preciznije (no ovaj zapis se rijetko koristi u praksi):

$$\arg(1+i) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Koristeći pravila za potenciranje, množenje i dijeljenje za kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku sa **24. stranice** lako dobivamo sljedeća **računska pravila za argument** kompleksnog broja:

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Iako se izraz "$+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$" već nalazi u izrazu "arg" da ne bi kojim slučajem zaboravili u zadacima napisati "$+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$", namjerno smo u sve desne strane prethodnij formula dopisali ovaj član tako da bude vidljiv👍 .

Naravno, osim ovih osnovnih formula moguće je izvesti i neke druge, kao što je **odnos argumenta i konjugiranja**.

1.34 Ako je $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, *tada je*

$$\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Često se pogrešno napiše da je

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \textit{(NE)}$$

što nije točno jer oblik na desnoj strani od z nije njegov trigonometrijski oblik. Zašto? Zato što uz "sin" ne piše $+i$ nego $-i$. Sad nam trebaju svojstva neparnosti i parnosti redom od funkcija $\sin x$ i $\cos x$, koja detaljno radimo u **2. dijelu** i **4. dijelu** gradiva $-\sin x = \sin(-x)$, $\cos x = \cos(-x)$,

iz čega slijedi:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right),$$

iz čega slijedi: $\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **Q.E.D.**

1.35 *Pokažimo da vrijedi, te zapamtimo dobro ovu formulu:*

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Za dva različita postupka rješavanja ovog zadatka vidjeti **VIDEO:** ▶

Dva osnovna tipa zadataka u kojima možemo koristiti pretodnu **tehniku s argumetnima** su sljedeća:

1. **u uvjetu zadatka se već pojavljuje argument** (**zadaci 1.36 - 1.37**) ;
2. **rješavanje tzv. ne-algebarskih jednadžbi u** $\mathbb{C}$ (**zadaci 1.38 - 1.40**).

1.36 *Pronađimo sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijede uvjeti:*

$$\arg\left(\frac{i \cdot z^2}{1+i}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad i \quad |z| = 3.$$

Zadatak poput ovoga, gdje se u uvjetima pojavljuje argument, otvaramo tako što tražimo kompleksni broj u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ odnosno tražimo njegov $\arg(z) = \varphi + 2k\pi$ i $|z| = r$. Ovdje je već u uvjetu zadatka zadan $|z| = 3$, pa je još potrebno naći $\arg(z)$, koristeći svojstva argumenta s prethodne stranice:

$$\arg\left(\frac{i \cdot z^2}{1+i}\right) = \arg(i) + 2\arg(z) - \arg(1+i) \implies$$

$$\arg\left(\frac{i \cdot z^2}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\arg(z) - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2\arg(z) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Zbog toga,

$$\arg\left(\frac{i \cdot z^2}{1+i}\right) = \frac{3\pi}{4} \implies 2\arg(z) + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\quad k \in \{0,1\},$$

$$\implies \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi,\quad k = 0,1.$$

Prema tome rješenja ovog zadatka su:

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$ ✌

1.37 **Ljetni ispitni rok 06.07.2020.**

Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi:

$$\arg\left(\frac{z^2}{i \cdot \bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \mathrm{Re}(z^2) = 1.$$

[**R.** nevjerojatno, ali postoji samo jedno rješenje i to je $z = -1$, pogledajmo **VIDEO** ▶]

Jednadžba $z^3 + 4z = 0$ je algebarska i rješava se poput jednadžbi koje smo već riješili u **zadacima 1.30-1.33** kao primjenu korjenovanja u $\mathbb{C}$. Prema tome:

$$z^3 + 4z = 0 \iff z(z^2+4) = 0 \implies z_1 = 0,\ z^2 + 4 = 0\,.$$

Još trebamo riješiti $z^2 + 4 = 0$ (vidi zad. 26):

$$z^2 + 4 = 0 \iff z^2 = -4 \iff z = 2\sqrt{-1},$$

pa kao u **zadatku 1.32** dobivamo da je: $z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$.

Mogli smo do ovoga doći i potpunim rastavljanjem ove jednadžbe na proste faktore:

$$z^3 + 4z = 0 \iff z(z+2i)(z-2i) = 0$$
$$\implies z_1 = 0,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i\,.$$

Međutim, jednadžba $z^3 + 4\bar{z} = 0$ nije algebarska jer se u njoj pojavljuje konjugiranje (isto je tako i ako se u njoj pojavljuje modul ili realni ili imaginarni dio). Budući da nije algebarska onda se ne rješava kao $z^3 + 4z = 0$, nego se njeno rješavanje bazira na aksiomu jednakosti dva kompleksna broja:

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \ \text{ i } \ \arg(z_1) = \arg(z_2)\,.$$

Poštujući ovo pravilo, sad smo u stanju riješiti sljedeći zadatak.

1.38 *Naći sva rješenja $z \in \mathbb{C}$ jednadžbe:* $z^3 + 4\bar{z} = 0$.

Tražimo rješenja ove jednadžbe u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tj. tražimo njegov modul $|z| = r$ i $\arg(z) = \varphi + 2k\pi$. Prvo ćemo jednadžbu napisati u obliku jednakosti dva kompleksna broja:

$$z^3 + 4\bar{z} = 0 \iff z^3 = -4\bar{z}$$
$$\iff |z^3| = |-4\bar{z}| \ \ i \ \ \arg(z^3) = \arg(-4\bar{z}).$$

Prvo rješavamo jednadžbu s modulim, koji je realan broj, gdje koristimo svojstva modula sa **19. stranice**:

$$|z^3| = |-4\bar{z}| \implies |z|^3 = 4|z| \implies |z|(|z|^2 - 4) = 0$$
$$\implies |z| = 0,\ |z| = \sqrt{4} = 2\,.$$

Sada rješavamo jednadžbu s argumentima, koristeći svojstva argumenta sa **31. stranice**:

$$\arg(z^3) = \arg(-4\bar{z}) \implies 3\arg(z) = \arg(-4) + \arg(\bar{z}) + 2k\pi$$
$$\implies 3\arg(z) = \arg(-1) - \arg(z) + 2k\pi$$

$$\Longrightarrow \quad 4\arg(z) = \pi + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},$$

za $k \in \{0,1,2,3\}$. Prema tome, jednadžba $z^3 + 4\bar{z} = 0$ **ima sljedećih pet rješenja** (a ne tri rješenja kao pripadna algebarska jednadžba $z^3 + 4z = 0$):

- $|z| = 0 \implies z_1 = 0,$
- $|z| = 2$ i $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \implies$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $(k = 0)$;

$z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $(k = 1)$;

$z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $(k = 2)$;

$z_5 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $(k = 3)$.

Potpuno ista rješenja bi dobili i da smo za parametar $k \in \mathbb{Z}$ **uvrštavali vrijednosti redom za** $k = -2, -1, -0, 1$ umjesto za $k = 0,1,2,3$, samo što bi dobili drukčiji raspored rješenja što je ne bitno. 😎

1.39 Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi:

$$z^2 = i \cdot \bar{z}\,.$$

[**R.** $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -i$.]

[**R.** I. način kao u **zadatku 1.38**: **VIDEO** ▶️];

[**R.** II. način je "čisti" algebarski: **VIDEO** 🔺 Za iznenaditi je da ovaj algebarski način je dosta složen, jer treba riješiti 2x2 sustav nelinearnih jednadžbi :( ].

1.40 **Međuispit 26.11.2019.**

Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ *za koje vrijedi:*

$$z^3(1+i)^2 = \bar{z}^2(2 - 2\sqrt{3}i).$$

[**R:**

$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right)$, $k = 0,1,2,3,4$

tko raspiše zasebno svaki od ovih 5 rješenja dobi još jedan bod👍, detalji **VIDEO:** ▶️]

1.4 JEDNADŽBA KRUŽNICE ZAPISANE U SKUPU KOMPLEKSNIH BROJEVA

Znamo da kružnica u ravnini $\mathbb{R}^2$ s centrom u točki (p,q) i polumjerom r je skup svih točaka (x,y) koje su do centra kružnice (p,q) jednako udaljene i to za vrijednost polumjera r. Zbog toga njena jednadžba je:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,.$$

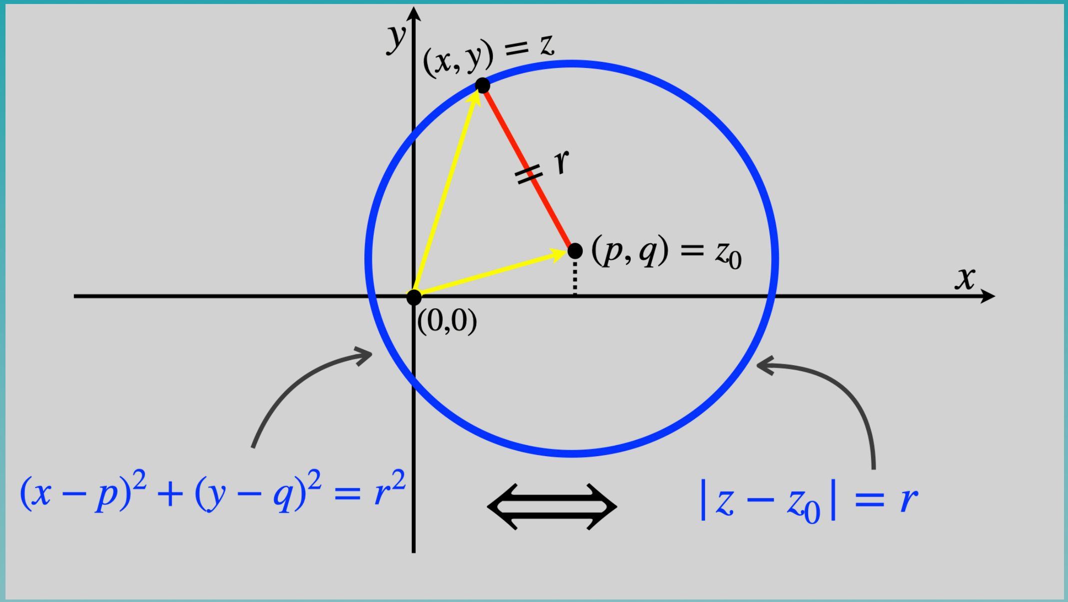
Međutim, ova se jednadžba kružnice može još jednostavnije zapisati ali u skupu $\mathbb{C}$. Koristeći uobičajene oznake i operacije u $\mathbb{C}$: $z=x+yi=(x,y)$, $z_0=p+qi=(p,q)$ i $|u+vi|^2=u^2+v^2$, dobivamo da je:

$$|z-z_0|^2=|(x+yi)-(p+qi)|^2=|(x-p)+(y-q)i|^2=$$
$$=(x-p)^2+(y-q)^2\,.$$

Zbog toga je:

jednadžba kružnice s centrom u (p,q) i polumjerom r

$$|z-z_0|=r \iff (x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,.$$



Analogno se u $\mathbb{C}$ mogu zapisati jednadžbe otvorenog ili zatvorenog kruga:

jednadžba otvorenog ili zatvorenog kruga s centrom u (p,q) i polumjerom r :

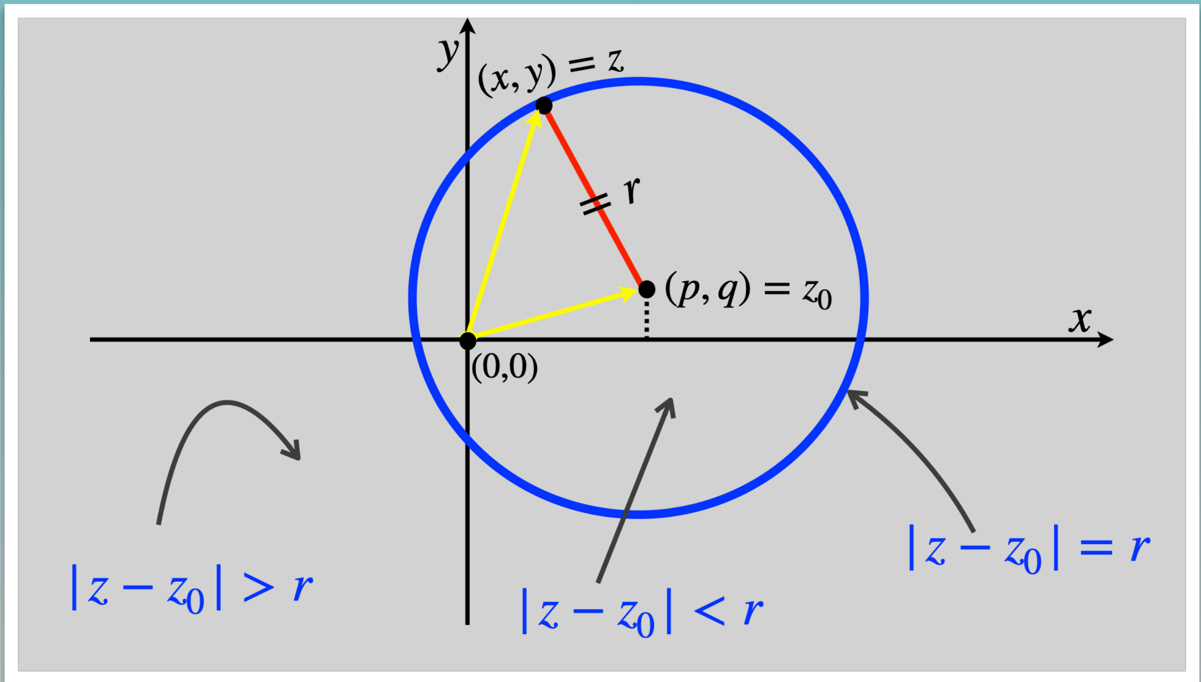
$$|z-z_0|<r \iff (x-p)^2+(y-q)^2<r^2\,,$$
$$|z-z_0|\le r \iff (x-p)^2+(y-q)^2\le r^2\,.$$

Slično se u $\mathbb{C}$ mogu zapisati jednadžbe otvorene ili zatvorene vanjštine kruga (sve ono izvana danog kruga), kao komplemenata izvan otvorenog ili zatvorenog kruga:

jednadžba otvorenog ili zatvorenog kruga s centrom u (p,q) i polumjerom r :

$$|z - z_0| > r \iff (x-p)^2 + (y-q)^2 > r^2,$$

$$|z - z_0| \geq r \iff (x-p)^2 + (y-q)^2 \geq r^2.$$



1.5 STUDENTSKI i pro-fini ZADACI

Na kraju ovog prvog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a tijekom 2022./23. u okviru predmeta Matematička analiza 1, a vezano uz 1. dio ovog gradiva. Tko god ima zanimljiv zadatak iz gradiva 1. djela zajedno s rješenjem i postupkom neka ga **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti dodatne zanimljivije zadatke😎 .

1.41 *[Logika, skupovi i kompleksni brojevi] Zadana je tvrdnja:*

$$P(z) \equiv \text{"}z \in \mathbb{C} \text{ takav da je } z^2 \geq 0\text{"},$$

te takozvani "karakteristični skup od tvrdnje $P(z)$" koji se definira s: $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} : P(z) \equiv T\}$. Pronaći skup $\mathscr{C}$.

[**R.** $\mathscr{C} = \mathbb{R} = \mathbb{R} + 0 \cdot i$; detalji **VIDEO**🔺]

1.42 [**LJIR 13.07.2021.– (a)**] Dokazati da za svaki $x \in \langle 0, \pi \rangle$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdots \cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x} .$$

[**R. VIDEO:**▶️ Treba znati poznatu formulu iz službenog podsjetnika na ispitu: $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$.]

1.43 [**JIR 07.09.2021.–(a)**] Odrediti $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$|z| = 1, \ \mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(z^2) .$$

[**R.** $z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

Najjednostavniji mogući postupak je tu na **VIDEU:**▶️ Ključno je koristiti formulu iz službenog podsjetnika: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$] .

1.44 *Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi: $(z+1)^3 = -i$. Potom dobivena rješenja napisati u trigonometrijskom obliku.*

[**Naputak**: $(z+1)^3 = -i \implies z = -1 + \sqrt[3]{-i}$. Na dalje postupati kao u **Zadatku 1.31, II. način**]

1.45 *Za neki $n \in \mathbb{N}$ dokazati da vrijedi:*

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{4n} + i^{4n+1} = i\,.$$

[Naputak: $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ ili općenito za svaku uzastopnu četvrorku $i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3}, i^{4k+4}$ vrijedi:
$i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} + i^{4k+4} = i - 1 - i + 1 = 0$ za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
i ktome još znamo da je $i^{4n+1} = i$ **]**.

1.46 *Izračunati* $\sqrt[4]{z_0}$ *ako je:*

$$z_0 = \left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right).$$

[Naputak: Nije teško provjeriti da je:

$$\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\mathrm{cis}\frac{2\pi}{5}\right) = \left(\mathrm{cis}\frac{4\pi}{5}\right)\cdot\left(\mathrm{cis}\frac{2\pi}{5}\right) =$$

$$= \left(\mathrm{cis}\frac{6\pi}{5}\right).\ \mathbf{]}$$

1.6 POPULARNA TEORIJSKA PITANJA NA ISPITIMA IZ PRVOG DIJELA GRADIVA

• Napisati definiciju jedne od osnovnih logičkih operacija ($\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \implies Y$, $X \iff Y$) i dokazati jednu od logičkih tvrdnji, poput "obrata po knotrapoziciji" ili dati konkretna primjer koji pokazuje da općenito ne vrijedi obrat od $X \implies Y$;

• Napisati prinicpi matematičke indukcije za dokaz da je neka tvrdnja $T(n_0)$ točna za sve $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$;

• Ako je $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$, tada dokazati jednu od formula:

•• $\bar{z} = r\big(\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)\big)$;

•• $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$;

•• $z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)\big)$;

•• $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$;

•• $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

• Ako je $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ i $\arg(z) = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tada dokazati jednu od formula za argument kompleksnog broja:

•• $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

•• $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg((z_1) \cdot \arg(z_2)$;

•• $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$;

•• $\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg(z_1 - z_2)$.

• Ako je $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ i $|z| = r$, tada dokazati jednu od formula za modul kompleksnog broja:

•• $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z^n| = |z|^n$;

•• $|\bar{z}| = |z|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

DRUGI DIO

FUNKCIJE. RELACIJE

Funkcija $f : X \to Y,\ y = f(x)$ je **preslikavanje - transformacija**, koja točke x iz ulaznog skupa X (kraće zap pisano $x \in X$) **preslikava - transformira** u točke izlaznog skupa Y (kraće zapisano $y \in Y$) pomoću zadanog **zakona pridruživanja - transformiranja** $y = f(x)$ (kraće zapisano $x \mapsto f(x)$). Pri tome, za $x \in X$ njegova slika $f(x) \in Y$ je jedinstvena odnosno jedan $x \in X$ se može preslikati u najviše jedan $y = f(x)$. Funkcija ne mora biti definirana u svim točkama polaznog skupa X pa je dobro znati odrediti takozvanu **domenu funkcije** $D(f) \subseteq X$, koja se prirodno definirao kao $D(f) = \{x \in X : f(x) \text{ definirano}\}$. Zbog toga se često piše:

$$f : D(f) \subseteq X \to Y,\ \ y = f(x)\,.$$

Jedan od najvažnijih pojmova koji se veže uz funkciju je **graf funkcije**, koji sadrži sve geometrijske informacije o samoj funkciji , te se definira kao:

$$G(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in D(f)\big\} \subseteq X \times Y,$$

gdje je $X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ - **Kartezijev produkt skupova X i Y**.

Binarna relacija ρ na skupu X je bilo kakav podskup od $X \times X$, što se kraće zapisuje $\rho \subseteq X \times X$. Prema tome, ako je $X = Y$ tada je relacija na X širi - općenitiji pojam od grafa $G(f) \subset X \times X$ odnosno od funkcije $y = f(x)$.

2.1 FUNKCIJA $f : X \to Y$

Za razliku od drugih dijelova gradiva Matematičke analize 1, koji se bave s realnim funkcijama realne varijable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odnosno slučajem kad je $X = Y = \mathbb{R}$, u ovom drugom dijelu su X i Y bilo kakvi skupovi. Naravno, većina primjera za svojstva funkcija i pripadnih zadataka su slučaj $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Na prethodnoj stranici smo definirali $D(f) \subseteq X$ domenu funkcije $f : X \to Y$, $y = f(x)$. Za većinu funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ određivanje njene domene je delikatan proces, koji ćemo vježbati u **4. dijelu**. Zbog toga to sada preskačemo, te se bavimo funkcijama za koje je $D(f) = X$ odnosno funkciju odmah zadajemo na njenoj domeni, čisto da si olakšamo na trenutak.

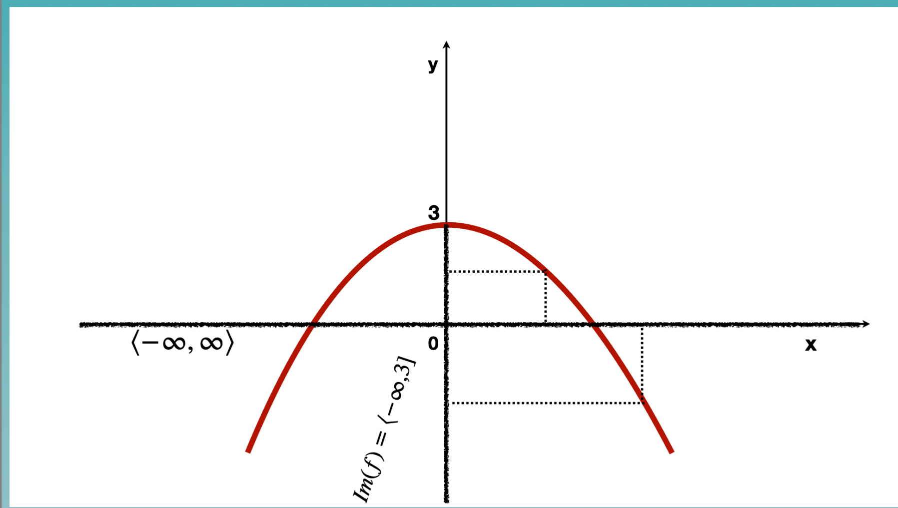
2.1.1 SLIKA I DOMENA FUNKCIJE

Slika funkcije je podskup od Y i prirodno se definirana kao:

$Im(f) = \{f(x) \in Y : x \in D(f)\}$ ili kraće $Im(f) = f(D(f))$.

Pri tome kažemo da je x **original**, a $f(x)$ **njegova slika**. Kako efektivno odrediti sliku neke funkcije? Na dva načina: ako je lako skicirati graf od $f(x)$ što je rijetko onda **grafički**, a ako ne, onda **analitički-računski**. Što znači **grafičko** a što **računsko određivanje slike** neke funkcije pokazat ćemo u sljedećim zadatcima.

2.1 Grafički i računski *odredimo sliku (kvadratne) funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x^2$.



Grafičko određivanje slike - ovo je za sve one koji znaju dobro i točno nacrtati parabolu te iz svake točke $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ povuči vertikalnu crtu do točke $(x, f(x)) \in G(f)$ na grafu-paraboli, a potom dalje nastaviti s horizontalnom crtom do $f(x) \in \langle -\infty, 3]$.

Računski - igra s intervalima. Kako je $Im(f) = f(D(f))$, to za ovu funkciju vrijedi $f(\langle -\infty, \infty \rangle) = 3 - \langle -\infty, \infty \rangle^2$. Zbog toga korak po korak dolazimo do rješenja:

$$3 - \langle -\infty, \infty \rangle^2 = 3 - [0, \infty\rangle = 3 + \langle -\infty, 0] = \langle -\infty, 3] \implies$$

$$Im(f) = \langle -\infty, 3]. \ \square$$

Računski - kao skupovna jednakost. Trebamo dokazati jednakost skupova: $Im(f) = \langle -\infty, 3]$. Ovo je ekvivalentno sa $Im(f) \subseteq \langle -\infty, 3] \wedge \langle -\infty, 3] \subseteq Im(f)$. Da bi dokazali **prvu skupovnu inkluziju** $Im(f) \subseteq \langle -\infty, 3]$ ustvari treba pokazati:

$$f(x) \in \langle -\infty, 3], \forall x \in D(f) = \mathbb{R} \iff 3 - x^2 \in \langle -\infty, 3], \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\iff -\infty < 3 - x^2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \iff -x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da zadnja nejednakost $-x^2 \leq 0$ očito vrijedi to zbog ekvivalencija između prethodnih tvrdnji slijedi da vrijedi i početna tvrdnja $f(x) \in \langle -\infty, 3], \forall x \in \mathbb{R}$, pa **smo pokazali prvu skupovnu inkluziju** $Im(f) \subseteq \langle -\infty, 3]$.

Sada prelazimo na dokaz **druge skupovne inkluzije** $\langle -\infty, 3] \subseteq Im(f)$. Iz definicije slike funkcije, slijedi ono što trebamo zaista i pokazati:

$$\forall y \in \langle -\infty, 3], \exists x \in D(f) = \mathbb{R} \text{ takav da je } y = f(x) = 3 - x^2.$$

Prema tome za zadani $y \in \langle -\infty, 3]$ **treba riješiti jednadžbu** $y = f(x) = 3 - x^2$ **po nepoznatoj varijabli** $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Sličnim postupkom kao kada budemo u idućoj točki tražili inverz neke funkcije dobivamo traženi $x \in D(f) = \mathbb{R}$:

$$y = 3 - x^2 \iff x^2 = 3 - y \implies x_1 = \sqrt{3-y}, \ x_2 = -\sqrt{3-y}.$$

Primjetimo da su kvadratni korijeni x_1 i x_2 dobro definirani jer

$$y \in \langle -\infty, 3] \implies y \leq 3 \iff 3 - y \geq 0.$$

Prema tome za zadani $y \in \langle -\infty, 3]$ dobili smo čak dva x_1 i x_2 iz domene od $f(x)$ sa svojstvom da je $y = f(x_1)$ i $y = f(x_2)$, pa je recimo dvostruko jasno zašto je onda $y \in Im(f)$. Time **smo opravdali i drugu inkluziju** $\langle -\infty, 3] \subseteq Im(f)$. $\square$

Prethodni zadatak se može generalizirati na bilo koju kvadratnu funkciju:

2.2 *Promatramo općenitu kvadratnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *te neka je njeno tjeme* $x_T = -\dfrac{b}{2a}$. *Pokazati da vrijedi:* (**VIDEO** ▶)

za $a > 0 \implies Im(f) = [f(x_T), +\infty\rangle$,

za $a < 0 \implies Im(f) = \langle -\infty, f(x_T)]$,

gdje je $f(x_T) = -\dfrac{b^2}{4a} + c$.

2.3 *Odredimo sliku funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{5}{x^2+2}$.

U ovom zadatku nije rečeno na koji način se treba odrediti slika (grafički ili/i analitički). To je zato što, premda je ovo jednostavnija funkcija, **ona nije elementarna funkcija** pa prema tome neće se priznati ako netko napamet skicira njen graf (popis elementarnih funkcija je dan u **4. dijelu** - njihovi grafovi se mogu napamet skicirati i koristiti). Zbog toga, grafičko određivanje slike za ovu funkciju ne dolazi u obzir. To znači da nam ostaje analitički način, koji možemo realizirati pomoću intervala ili kao skupovnu jednakost.

Računski - igra s intervalima. Kako je $Im(f) = f(D(f))$, to za ovu funkciju vrijedi:

$f(\langle -\infty, \infty\rangle) = \dfrac{5}{\langle -\infty, \infty\rangle^2 + 2}$, pa korak po korak:

$$\langle -\infty, \infty\rangle^2 = [0,\infty\rangle, \langle -\infty, \infty\rangle^2 + 2 = [0,\infty\rangle + 2 = [2,\infty\rangle,$$

$$\frac{5}{\langle -\infty, \infty\rangle^2 + 2} = \frac{5}{[2,\infty\rangle} = 5\langle 0, \frac{1}{2}] = \langle 0, \frac{5}{2}] .$$

Prema tome, koristeći kvalitativna svojstva elementarnih funcija, koja radimo u **4. dijelu**, pokazali smo da je

$$Im(f) = \langle 0, \frac{5}{2}]. \ \square$$

Računski - kao skupovna jednakost. Trebamo dokazati jednakost skupova:

$$Im(f) = \langle 0, \frac{5}{2}]$$ VIDEO ▶ .

Ukoliko je funkcija $f(x)$ **mnogo složenija** od onih u prethodnim zadacima, na primjer $f(x)$ je racionalna funkcija, **tada jedino možemo odrediti sliku na računski način - kao skupovnu jednakost**. Naravno, da bi znali što dokazujemo prvo moramo naslutiti tu skupovnu jednakost $Im(f) = A$ odnosno što je to skup A na desnoj strani? Tek potom dokazujemo ovu skupovnu jednakost kao u **zadacima 2.1-2.3** . U ovim zadacima smo lako odredili skup A jer smo mogli lako i brzo skicirati graf dane funkcije $f(x)$. U sljedećem zadatku promatramo **složeniji tip funkcije**.

2.4 *Odrediti sliku funkcije:*

$f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

[**R.** $Im(f) = \langle 0,1\rangle$; –> VIDEO ▶]

Ovaj zadatak se može generalizirati na **općenitiju racionalnu funkciju,** te koristeći skoro isti postupak možemo pokazati da vrijedi:

2.5 Neka su $a, b, c \in \langle 0,\infty\rangle$ odnosno a, b, c su tri strogo pozitivna realna broja. *Odrediti sliku racionalne funkcije*:

$$f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{ax}{bx+c}.$$

[**R.** $Im(f) = \left\langle 0, \frac{a}{b}\right\rangle$; koristiti isti postupak kao u prethodnom **zadatku 2.4**]

Interesantno je da slika prethodne funkcije ne ovisi o realnom broju c . Primijetimo da smo kojim slučajem umjesto domene $\langle 0,\infty\rangle$ promatrali domenu $[0,\infty\rangle$, tada bi slika prethodne funkcije isto sadržavala 0 odnosno tada bi rješenje bilo: $Im(f) = \left[0, \frac{a}{b}\right\rangle$.

Kao igru ovog trena promatramo funkcije kod kojih su **domena i slika jednaki skupovi** odnosno $D(f) = Im(f)$. Kad su u pitanju parne i neparne potencije, tada vrijedi pravilo koje se lako grafički provjeri:

za $f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbb{N} \implies D(f) = \mathbb{R} \neq Im(f) = [0,\infty\rangle$,

za $f(x) = x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \implies D(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

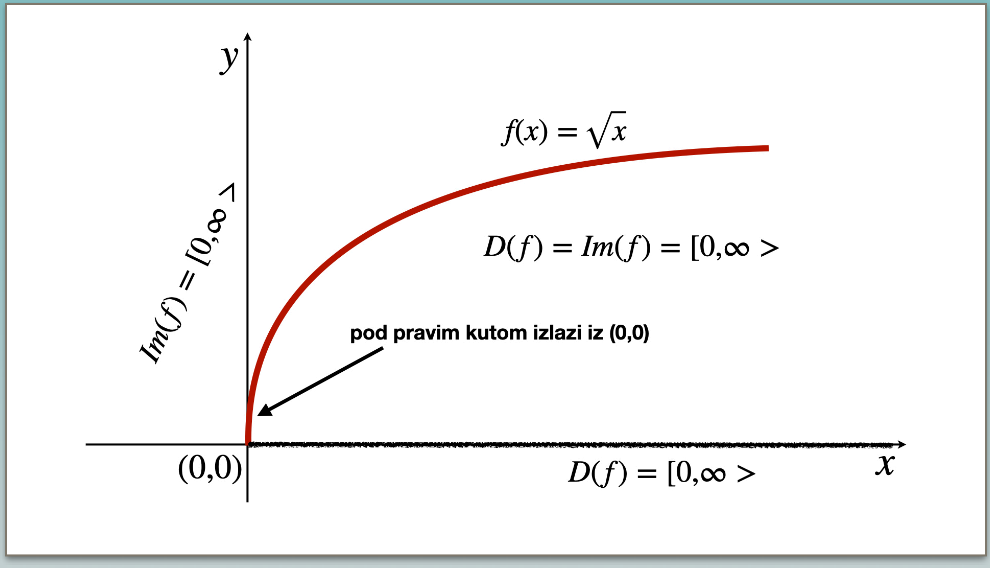
Osim parnih potencija, najjednostaviji primjer za ovo su pravci:

2.6 *Promatramo polinom prvog stupnja ili popularno rečeno pravac* $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$. *Pokazati da je*

$$D(f) = Im(f) = \mathbb{R}.$$

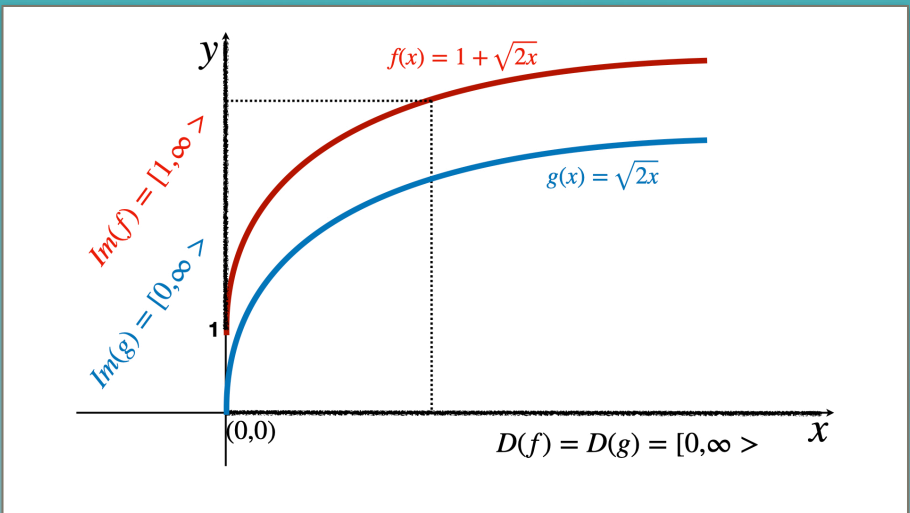
[**R.** S obzirom da nije rečeno na koji način trebamo odrediti sliku ove funkcije, onda je najbrže nacrtati njen graf (pravac) i grafički izračunati njenu sliku.]

Na jednoj od sljedećih stranica izvodimo **funkciju kvadratnog korijena** $f(x) = \sqrt{x}$ **kao inverznu funkciju desnog dijela parabole odnosno od fukcije** $g(x) = x^2,\ x \geq 0,\ D(g) = [0,\infty\rangle$, pogledajmo graf:



2.7 *Prvo grafički, a onda i računski odredimo sliku funkcije* $f : [0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \sqrt{2x}$.

Grafičko određivanje slike podrazumjeva da bez problema možemo brzo i lako skicirati graf ove funkcije:



te potom s grafa lako vidjedi da je $f([0,\infty\rangle) = [1,\infty\rangle$ odnosno $Im(f) = [1,\infty\rangle$. Kao što vidimo, graf od $f(x)$ je nastao translacijom (na gore) po osi Oy grafa funkcije $g(x) = \sqrt{2x}$.

Računski - kao skupovna jednakost. Trebamo dokazati jednakost skupova $Im(f) = [1,\infty\rangle$, koristeći da je skupovna jednakost $A = B$ ekvivalentna sa njenim inkluzijama: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Za detalje vidjeti na **VIDEU** ▶.

Određivanje slike $Im(f)$ neke funkcije $f(x)$ će isto tako biti "fora" i u sljedećoj točki, gdje nas zanima svojstvo surjektivnosti funkcije odnosno je li $f(x)$ surjekcija? **To je važno zbog stare mudre izreke**:

"bez slike nema surjekcije, a bez surjekcije nema bijekcije"

"bez bijekcije nema inverzne funkcije, a bez inverzne funkcije nema povratka u budućnost"↓

FEROVKE I FEROVCI MI SMO ZAKON ▶

2.1.2 Surjekcija, injekcija i bijekcija

Nakon što smo nekoj funkciji $f : X \to Y$ odredili njenu sliku $Im(f) \subseteq Y$ prirodno se postavlja pitanje: je li $Im(f) = Y$ ili je $Im(f) \subset Y$?

Definicija. *Kaže se da je funkcija $f(x)$* ***surjektivna*** *ili kraće* ***surjekcija*** *ako je $Im(f) = Y$, odnosno svaki element iz Y je slika nekog elemnta iz $D(f)$*. Kao što vidimo, da bi provjerili je li neka funkcija surjektivna **najvažnije je izračunati njenu sliku** (postupci iz prethodne točke). **Zašto je surjektivnost tako važna?** Odgovor:

"bez surjektivnosti nema bijektivnosti"

"bez bijektivnosti nema inverzne funkcije"

Sve funkcije iz **zadataka 2.1 -2.5** su bile zadane kao funkcije $f : D(f) \to \mathbb{R}$, te smo za sve njih izračunali pripadne slike i kako vidimo ono što je zajedno za sve njih je: $Im(f) \subset \mathbb{R}$. Prema tome niti jedna od ovih funkcija nije surjekcija. No u ovakvim situacijama se lako od dane funkcije napravi nova koja jeste surjekcija i to po sljedećem očitom principu:

funkcija $f : X \to Im(f)$ je surjekcija 👍.

Po ovom principu, kvadratnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ koja nije surjekcija, budući da je $Im(f) = [0,\infty\rangle \subset \mathbb{R}$, možemo zamjeniti sa skoro istom $g : \mathbb{R} \to [0,\infty\rangle$, $g(x) = x^2$, koja jest surjekcija jer je očito $Im(g) = [0,\infty\rangle = [0,\infty\rangle$.

Analogno, racionalnu funkciju iz **zadatka 2.3**,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{5}{x^2+2},$$

koja nije surjekcija, jer je $Im(f) = \langle 0,5/2] \subset \mathbb{R}$ možemo malo modificirati pa iz nje lako dobivamo sljedeću surjekciju:

$$g : \mathbb{R} \to \langle 0,\frac{5}{2}],\quad g(x) = \frac{5}{x^2+2}.$$

2.8 *Pokazati da je sljedeća funkcija surjekcija :*

$$f : [0,\infty\rangle \to [0,1\rangle,\ f(x) = \frac{x}{x+7}\ .$$

[**R.** Prvo računski kao u **zadatku 2.4** pokazati da je $Im(f) = [0,1\rangle$, a onda surjektivnost očito slijedi po gornjem principu.]

Kao što sami vidimo, naša uspješnost u određivanju je li neka funkcija surjekcija ovisi koliko smo dobro izvježbali računanje slike funkcije, pogotovo računski način preko jednakosti skupova. Sljedeći zadatak je nadogradnja **zadatka 2.5** u kome **na racionalnu funkciju djeluje funkcija kvadratnog korijena**, kao vanjska funkcija u danoj složenoj funkciji - kompoziciji funkcija (sa kompozicijom raznih funkcija se igramo u sljedećoj točki):

2.9 Odredimo skup $Y \subseteq \mathbb{R}$ takav da je *sljedeća funkcija surjekcija* :

$$f : [0,\infty\rangle \to Y, \quad f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2x+5}}.$$

[R: Računski kao u **zadatku 2.4** pokazati da je $Im(f) = [0, \sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$, a onda uzimamo da je $Y = Im(f)$.]

Da bi konačno stigli do tako željene bijektivnosti neke funkcije potrebno je još razmotriti njenu injektivnosti, jer:

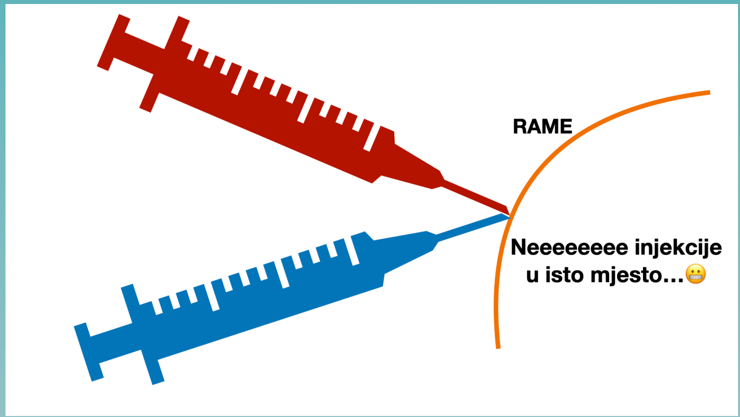
"bez injektivnosti nema bijektivnosti"
"bez bijektivnosti nema inverzne funkcije"

Definicija. Kaže se da je funkcija $f : X \to Y$ **injektivna** ili kratko **injekcija** ako je **jedan-jedan preslikavanje** odnosno "**različite originale preslikava u različite slike**":

I. računski način: $\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Na primjer, funkcija $f(x) = 2x + 1$ je injekcija ($D(f) = \mathbb{R}$) jer:
$x_1 \neq x_2 \implies 2x_1 \neq 2x_2 \implies 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ime i definicija matematičke injekcije nas podsjeća na medicinsku injekciju, jer kao što se dva različita originala ne smiju preslikati u istu sliku, tako se niti dvije medicinske injekcije ne smiju "upiknuti" na isto mjesto na tijelu:



Ako primjenimo **obrat po kontrapoziciji** (**zadatak 1.6**) na prethodnu definiciju injekcije, tada dobivamo ekvivalentnu tvrdnju ovoj definiciji: "**ako su dvije slike iste, tada su i njihovi originali isti**" (detalji na **VIDEU** ▶), što se analitički zapisuje kao:

II. računski način: $\forall x_1, x_2 \in D(f),\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

I na ovaj način pokažimo da je $f(x) = 2x + 1$ injekcija:

$f(x_1) = f(x_2) \implies 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \implies 2x_1 = 2x_2 \implies x_1 = x_2$.
Ovaj se način najčešće koristi kod složenijih funkcija, vidi zadatke dolje. □

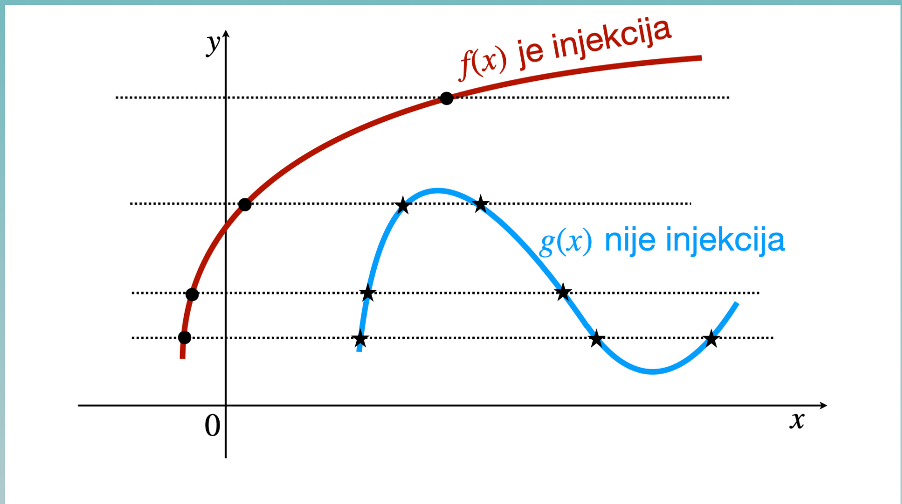
Negacija injektivnosti: $g(x)$ **nije injekcija ako**

$$\exists x_1, x_2 \in D(g),\ x_1 \neq x_2 \text{ takvi da je } g(x_1) = g(x_2).$$

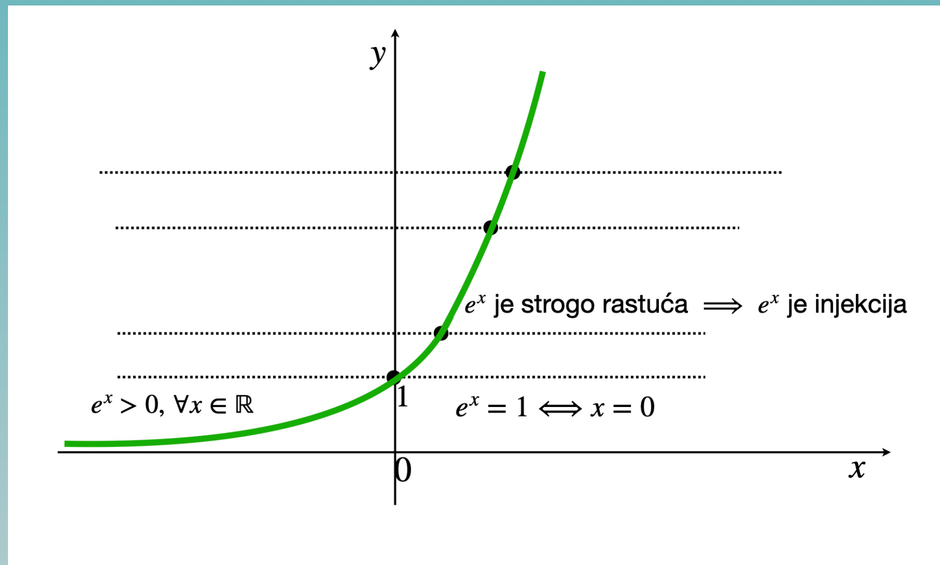
Na primjer, $g(x) = x^2 + 1$ nije injekcija ($D(g) = \mathbb{R}$) jer: za $x_1 = -3 \neq x_2 = 3$ slijedi da je $g(x_1) = g(x_2) = 10$. □

III. način - grafički. Kao i kod surjekcije tako i kod injekcije postoji grafički način, naravno za one funkcije za koje znamo lako nacrtati njen graf., a to su elementarne funkcije. U takvom slučaju primjenjujemo tzv. **horizontalni test**: crtamo horizontalne pravce $y = C$ za sve $C \in Im(f)$, te ako ti **pravci sijeku graf od $f(x)$ najviše u jednoj točki onda je $f(x)$ injekcija**. Suprotno ovomu, ako postoji $C \in Im(f)$ tako da pripadni horizontalni pravac $y = C$ **siječe graf $G(f)$ u dvije ili više točke, tada $f(x)$ nije surjekcija**.

Jedna od najljepših elementarnih funkcija sa svojstvom injektivnosti je **eksponencijalna funkcija** $f(x) = e^x$:



Horizontalni test za grafički dokaz injekcije



Horizontalni test za dokaz injenktivnosti eksponencijalne funkcije

U **4. dijelu gradiva** ćemo pokazati najefikasniji način za dokaz injektivnosti od eksponencijalne funkcije, a to je činjenica da **svaka strogo rastuća funkcija mora biti injektivna**. Budući da svi znamo napamet nacrtati graf eksponencijalne funkcije, na slici je prikazan i horizontalni test za dokaza njene injektivnosti. Štoviše, budući da je eksponencijalna funkcija strogo pozitivna te je jednaka jedinici samo za $x=0$, lako se injektivnost može pokazati:

II. računski način:

$$f(x_1)=f(x_2) \implies e^{x_1}=e^{x_2} \implies e^{x_1}-e^{x_2}=0$$
$$\implies e^{x_2}(e^{x_1-x_2}-1)=0 \implies e^{x_1-x_2}-1=0$$
$$\implies e^{x_1-x_2}=1 \implies x_1-x_2=0 \implies x_1=x_2\,.$$

2.10 *Neka je $a\neq 0$ i $b\in\mathbb{R}$. Pokazati da je $f(x)=e^{ax+b}$ injekcija.*

Kada se bavimo složenijom funkcijom, kao u sljedećim zadacima, tada u dokazu njene injektivnosti ne koristimo grafički način budući da za ovakve funkcije nije lako nacrtati graf. **U ovakvom slučaju najbolji je II. računski način**.

2.11 *Pokazati da je sljedeća funkcija injekcija :*

$$f:\mathbb{R}\backslash\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2+x}{2-x}\,.$$

[**R.** –> **VIDEO** ▶]

2.12 *Pokazati da je sljedeća funkcija injekcija :*

$$f:[0,\infty\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\frac{3x}{2x+5}}\,.$$

[**R.** –> **VIDEO** ▶]

Prethodni zadatak se može generalizirati na općenitiju racionalnu funkciju koja se nalazi pod kvadratnim korijenom.

2.13 Neka su $a,b,c\in\langle 0,\infty\rangle$ odnosno neka su a,b,c tri strogo pozitivna realna broja. *Pokazati da je sljedeća funkcija injekcija :*

$$f:\langle 0,\infty\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\frac{ax}{bx+c}}\,.$$

[**R.** Koristiti isti postupak kao u **zadatku 2.12**]

U sljedećoj točki, kada se budemo igrali s kompozicijama funkcija, kao najčešći slučaj složene funkcije, pokazat ćemo da je **kompozicija injekcija ponovno injekcija**, pa je injektivnost moguće riješavati i na takav način.

Definicija. Kaže se da je funkcija $f: X \to Y$ **bijekcija** ako je **istovremeno i injektivna i surjektivna** . Kratko se to kaže:

"bijekcija = surjekcija ∧ injekcija"
"bez bijektivnosti nema inverzne funkcije"

Na temelju surjektivnosti i injektivnosti, koju smo napravili u **zadacima 2.1-2.13** sada možemo zadati neke klase funkcija funkcija koje su bijekcije, kao u sljedećim zadacima. Pri tome smo naučili dva osnovna principa, koja nam sada mogu mnogo pomoći kod zadavanja bijektivnih preslikavanja:

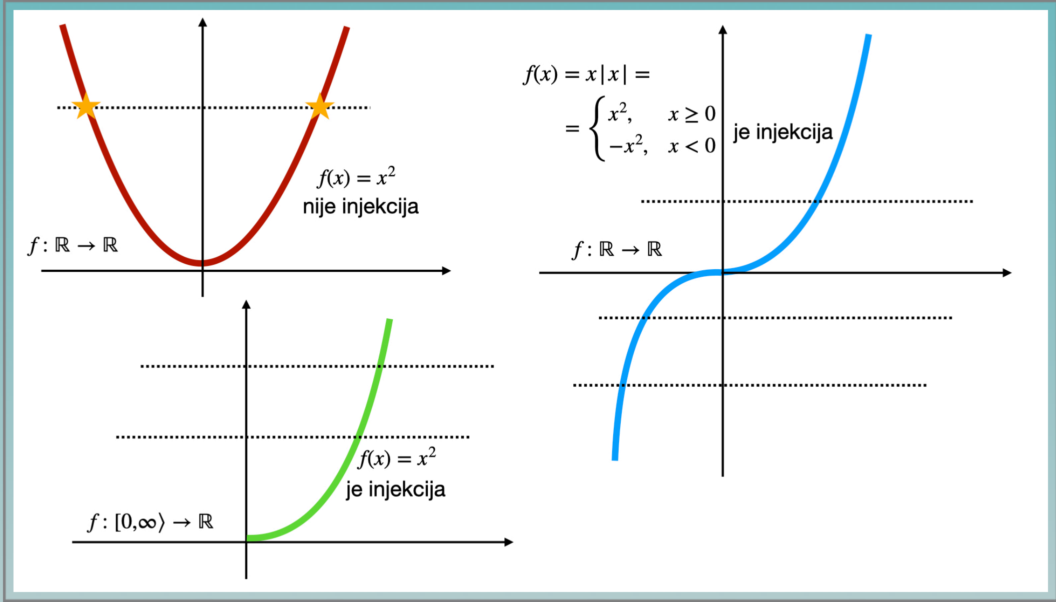
1. **ako $f: X \to Y$ nije injekcija**, tada možda možemo naći $A \subset X$ na kome je pripadna njena restrikcija injektivna odnosno **funkcija $f|_A : A \to Y$ je injekcija**;
2. **ako $f: X \to Y$ nije surjekcija**, **tada je sigurno surjekcija $f: X \to Im(X)$** .

2.14 Pomoću **zadataka 2.1-2.13** i prethodna dva principa pokazati da je svaka od sljedećih funkcija bijekcija:

A. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ (kosi pravci su bijekcije);

B. $f: [0,\infty\rangle \to \langle -\infty, 3],\ f(x) = 3 - x^2$ (restrikcija parabole je bijekcija) ;

C. ako je $a > 0$, neka je funkcija $f: [x_T, \infty\rangle \to [f(x_T), \infty\rangle$, $f(x) = ax^2 + bx + c;$ ako je $a < 0$, neka je funkcija $f: [x_T, \infty\rangle \to \langle -\infty, f(x_T)]$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (svaka parabola ima svoju "desnu" restrikciju koja jest bijekcija, gdje je x_T tjeme ove parabole - **zadatak 2.2**);



D. $f:[0,\infty\rangle \to [1,\infty\rangle, f(x) = 1+\sqrt{2x}$;

E. $f:[0,\infty\rangle \to \langle -\infty,3], \ f(x) = 3-5x+2|x|$; ->VIDEO

F. $f:[0,\infty\rangle \to \left\langle 0,\frac{5}{2}\right], \ f(x) = \dfrac{5}{x^2+2}$;

G. $f:\mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle, \ f(x) = e^{ax+b}$, gdje su $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$;

H. $f:\langle 0,\infty\rangle \to \langle 0,1\rangle, \ f(x) = \dfrac{x}{x+2}$;

I. $f:\langle 0,\infty\rangle \to \left\langle 0,\frac{a}{b}\right\rangle, \ f(x) = \dfrac{ax}{bx+c}$, gdje su a,b,c strogo pozitivni realni brojevi;

J. $f:\langle 2,\infty\rangle \to \langle -\infty,-1\rangle, \ f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$, -> VIDEO (oprez sa surjekcijom);

K. $f:[0,\infty\rangle \to \left[0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle, \ f(x) = \sqrt{\dfrac{3x}{2x+5}}$;

L. $f:\langle 0,\infty\rangle \to \left\langle 0,\sqrt{\frac{a}{b}}\right\rangle, \ f(x) = \sqrt{\dfrac{ax}{bx+c}}$, gdje su a,b,c strogo pozitivni realni brojevi.

2.1.3 Parne funkcije i periodičke funkcije nisu injektivne

Definicija. (za detalje vidjeti **4. dio** gradiva) Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je **parna funkcija** ako je $f(-x)=f(x)$ **za sve** $x \in D(f)$.

Parne potencije $f(x) = x^{2n}$ su najjednostavniji primjeri parnih funkcija, jer za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(-x) = (-x)^{2n} = \left((-x)^2\right)^n = \left(x^2\right)^n = x^{2n} = f(x). \ \square$$

Parna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nije injekcija. Očito, ako je $f(x)$ parna funkcija, tada za neki $x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}, \ x \neq 0$ je $-x \neq x$, te vrijedi $f(-x) = f(x)$. Ova se tvrdnja može lako dokazati i grafički pomoću horizontalnog testa, budući da je **graf parne funkcije simetričan u odnosu na y os**.

Osim parnih potencija, kao parna funkcija je popularna i **funkcija apsolutne vrijednosti** :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Detaljnije u **4. dijelu** gradiva.

Znamo da $f(x) = x^{2n}$ nije injekcija, jer je parna funkcija, ali njena **restrikcija na pozitivne x jest injekcija** odnosno funkcija:

$$g:[0,\infty\rangle \to \mathbb{R}, \ g(x) = x^{2n} \quad \text{ili} \quad \text{kratko } g(x) = f|_{[0,\infty\rangle}(x)$$

je injekcija. Općenita oznaka: ako je $g(x)$ **restrikcija funkcije** $f(x)$ **na skup** $A \subset D(f)$, tada se to kratko može zapisati kao:

$$g(x) = f\,|_A(x)\,.$$

Definicija. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **periodička funkcija** ako postoji realan broj T takav da vrijedi:

$$f(x+T) = f(x) \text{ za sve } x \in D(f).$$

Broj T se zove period, a najmanji takav period se zove **temeljni period funkcije** $f(x)$.

Na primjer, kao što su parne potencije osnovni model za parne funkcije, tako su trigonometrijske funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ osnovne periodičke funkcije. Svaki broj oblika $T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, je period za obadvije funkcije, jer vrijedi:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \text{ i } \cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \text{ za sve } x \in \mathbb{R},$$

(ove jednakosti smo koristili u prethodnom dijelu gradiva, kad smo se igrali s trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja, a posebno s njegovim argumentom). Međutim, **samo je jedan temeljni period i isti je za obadvije funkcije, a to je $T = 2\pi$**. Zbog toga se često kaže da su $f(x) = \sin x$ **i** $g(x) = \cos x$ **2π-periodičke funkcije**.

Ovog trena za nas je interesantan sljedeći rezultat.

Periodička funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije injekcija. Očito, neka je T period (ne mora biti nužno temeljni) i neka su

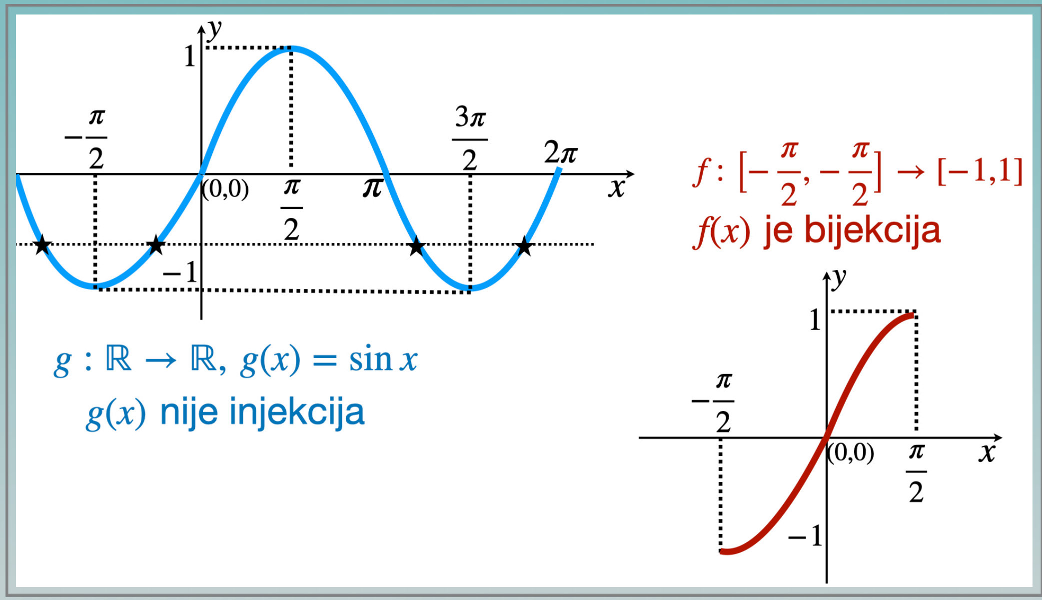
$$x_1 \neq x_2 := x_1 + T \implies f(x_1) = f(x_1 + T) = f(x_2).$$

Kako vidimo, periodička funkcija ovakve različite originale NE preslikava u različite slike, što je protivno injekciji, koja SVAKA DVA različita originala preslikava u različite slike.

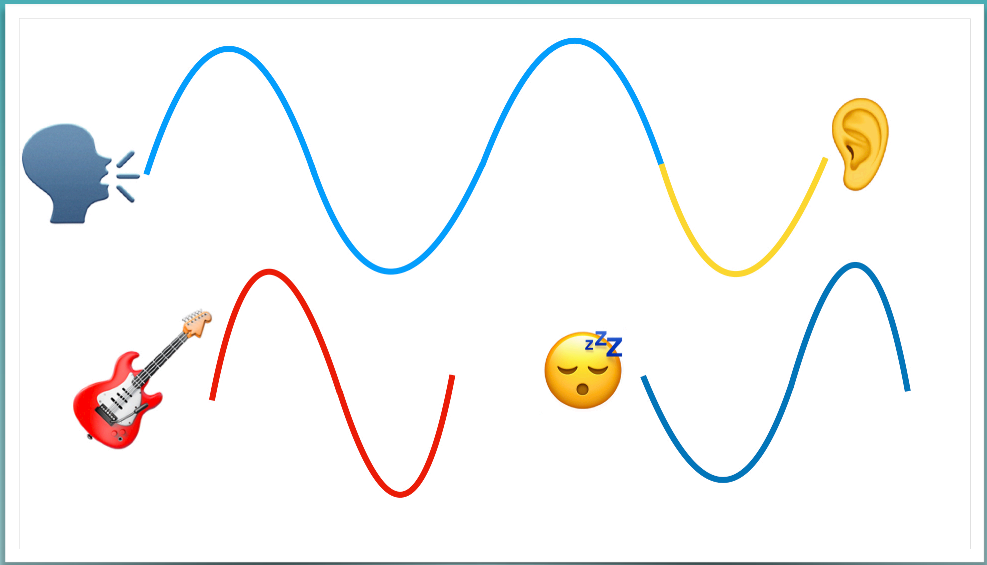
Kao i kod parnih funkcija, tako i kod periodičnih funkcija je moguće naći skup $A \subset D(f)$ takav da je njena restrikcija $f\,|_A(x)$ injekcija na A. Na primjer:

$$f(x) = \sin x \text{ i } A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \implies f\,|_A(x) \text{ je injekcija };$$

$$f(x) = \cos x \text{ i } A = [0,\pi] \implies f\,|_A(x) \text{ je injekcija }.$$



To što periodične funkcije nisu injektivne ne umanjuje fenomenalni značaj periodičnosti u matematičkom modeliranju prirode. Jer da nema periodičnosti ne bi bilo komunikacije među ljudima, glazbe, muzičkih instrumenata i tako dalje:



Postoje mnoge parne funkcije $f(x)$, poput ovih u sljedećem zadatku za koje je moguće naći skup $A \subset D(f)$ takav da je $f|_A(x)$ injekcija na A.

2.15 *Koristeći svojstva parnosti i periodičnosti, pokazati da sljedeće funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nisu injekcije.* Također *obrazložite u zadacima od 1.– 4. zašto su restrikcije ovih funkcija na skup* $[0,\infty\rangle$ *injekcije?*

1. $f_1(x) = 5 - x^2$;
2. $f_2(x) = 4 + |x|$ –>**VIDEO** ;
3. $f_3(x) = 7x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$;
4. $f_4(x) = e^{x^2} - 2e^{|x|} + 7$;
5. $f_5(x) = 3\sin(2x) - 4\cos(2x) + 1$ je periodička, zašto? Potom joj pronaći temeljni period. –>**VIDEO**

2.1.4 Kompozicija funkcija. Inverzna funkcija

Složene funkcije uglavnom nastaju kao kombinacija algebarski operacija i kompozicije elementarnih funkcija. Ako su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ dvije elementarne funkcije, tada njihova **kompozicija** $g \circ f : X \to Z$ je jedna nova složena funkcija definirana sa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \, Im(f) \subseteq D(g),$$
$$X \ni x \longmapsto f(x) \in Y \longmapsto g(f(x)) \in Z\,.$$

Uvjet $Im(f) \subseteq D(g)$ je nužan da bi kompozicija imala smisla. No kada se traži domena $D(g \circ f)$ prethodni uvjet se sam po sebi pojavi odnosno osigura ✌️.

U kompoziciji $g \circ f$ se često kaže da je $f(x)$ **unutarnja**, a $g(x)$ **vanjska** funkcija. Na primjer, složenu funkciju

$$h : [0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ h(x) = e^{2\sqrt{x}+1},$$

možemo prikazati kao kompoziciju $h = g \circ f$, gdje je

$$g(x) = e^{x} \ \text{ i } \ f(x) = 2\sqrt{x} + 1.$$

Budući da smo u **točki 2.1.2** pokazali da su ove dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$ injekcije, da li moramo iznova dokazivati injektivnost njihove kompozicija $h(x)$ ili je njena injektivnost direktna posljedica od injektivnost od $f(x)$ i $g(x)$?

Odgovor je sadržan u sljedećoj tvrdnji, koju ćemo i dokazat.

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ injekcije (bijekcije), tada je i njihova kompozicija $(g \circ f)(x)$ injekcija (bijekcija). Zaista,

$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ jer je $f(x)$ **injekcija**;

$f(x_1) \neq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ jer je $g(x)$ **injekcija** .

Prema tome pokazali smo da:

$$x_1 \neq x_2 \implies (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)\,,$$

odnosno i $g \circ f$ **je injekcija**. Ovo se svojstvo može primijeniti na proizvoljan konačan broj iinjekcija.

Ako su $f_1(x),\ f_2(x), \cdots,\ f_n(x)$ injekcije (bijekcije), tada je i kompozicija $(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x)$ injekcija (bijekcija).

U sljedećem zadatku ćemo pomoću kompozicije funkcija te injektivnih funkcija iz **točke 2.1.2** napraviti nove složene funkcije i koristeći gornje pravilo lako pokazati da su one isto tako injekcije.

2.16 Pomoću kompozicije injektivnih funkcija pokazati da su sljedeće funkcije injektivne:

1. $f : [0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x^2+2}}$

[**R.** $f(x) = f_2(f_1(x)),\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_1(x) = \dfrac{5}{x^2+2}$];

2. $f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$

[**R.** $f(x) = f_2(f_1(x)),\ f_2(x) = e^x,\ f_1(x) = \dfrac{x}{x+2}$];

3. $f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$

[**R.** $f(x) = f_2(f_1(x)),\ f_2(x) = \dfrac{x}{x+2},\ f_1(x) = e^x$].

Nije teško pokazati da je kompozicija surjekcija ponovno surjekcija. No ovo svojstvo se ne koristi kod dokaza surjektivnosti nego postupamo kao u prethodnim **točkama 2.1.1 i 2.1.2**.

Definicija. Neka je $f : X \to Y = Im(f)$ bijekcija. Funkcija $f^{-1} : Y \to X$ je **inverzna funkcija** od $f(x)$ ako vrijedi:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in D(f) \subseteq X,$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in Im(f) = Y.$$

Prema tome **inverzna funkcija vraća svaku sliku** $f(x)$ **u njen jedinstveni original**. Prirodno je postaviti sljedeća pitanja i znati odmah njihove odgovore:

Što je $D(f^{-1})$? Iz definicije slijedi $D(f^{-1}) = Im(f)$ 😇
Ako $f : X \to Y = Im(f)$ nije bijekcija, je li može imati inverznu funkciju? Add: NE 🙃
Koliko inverznih funkcija može imati neka bijekcija?
Add: Samo jednu!👍

Odgovori na prethodna pitanja su posljedica sljedećeg fundamentalnog rezultata:

$f : X \to Y$ **je bijekcija** $\Longleftrightarrow$ **postoji** $f^{-1} : Y \to X$.

Kako za zadanu funkciju $f : X \to Y$ **efektivno izračunati njenu inverznu funkciju** $f^{-1} : Y \to X$? Iz definicije imamo:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Prema tome, da bi našli inverznu funkciju od $f(x)$ **treba riješiti jednadžbu** $f(x) = y$ **po nepoznatoj varijabli** x, gdje su poznati funkcija f i varijable y. To znači da teba izraziti x pomoću y. Potpuno isto kao kod surjektivnosti pomoću skupovne jednakosti.

U **zadatku 2.14.A** smo pokazali da su kosi pravci uvijek bijekcije. Sad smo u prilici pronaći im inverznu funkciju. Na primjer, neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom prvog stupnja $f(x) = 3x - 7$ odnosno (grafički) kosi pravac. Tada imamo:

$$3x - 7 = y \implies 3x = y + 7 \implies x = \frac{1}{3}y + \frac{7}{3} = f^{-1}(y).$$

Prema tome, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. $\square$

Ovo nije slučajno da je **inverzna funkcija pravca isto pravac** . Na potpuno isti kao kod prethodnog pravca možemo riješiti slijedeći zadatak:

2.17 *Pronađimo inverznu funkciju od :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0.$$

R. $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

U prethodnim točkama smo pokazali da kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ sama po sebi nije injekcija, ali da njena restrikcija na pozitivne realne brojeve je injekcija pa je i bijekcija na svoju sliku odnosno:

$$f : [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle,\ f(x) = x^2$$ **je bijekcija**.

Potom smo rekli da je njen inverz **funkcija kvadratnog korijena**:

$$f^{-1} : [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}\,.$$

Sada je došlo vrijeme to i provjeriti:

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x,$$

$$f(f^{-1}(y)) = \left(f^{-1}(y)\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = y. \square$$

Kako vidimo, jedno je pronaći nepoznatu inverznu funkcije zadane funkcije $f(x)$ (kao u **zadatku 2.17**) , a drugo je provjeriti je li već poznata funkcija inverzna funkcija zadane funkcije, kao što smo to upravo sad provjerili za korijen funkciju kao inverznu funkciju kvadratne funkcije koja je restringirana na inverval $[0,\infty\rangle$.

U prethodnim točkama smo grafički pokazali da je **eksponencijalna funkcija** $f(x) = e^x$ injekcija pa je na svoju sliku i bijekcija odnosno

$$f : \mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle,\ f(x) = e^x$$ **je bijekcija**.

Zbog toga ona ima inverznu funkciju i to je upravo veoma poznata **logaritamska funkcija**:

$$f^{-1} : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \ln x\,.$$

Ako sada uvrstimo za $f(x) = e^x$ i $f^{-1}(x) = \ln x$ u jednadžbe za inverznu funkciju, tada ćemo računski provjeriti zaista da su ovo jedna drugoj inverzne funkcije:

$$f^{-1}(f(x)) = \ln f(x) = \ln e^x = x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R},$$
$$f(f^{-1}(y)) = e^{f^{-1}(y)} = e^{\ln y} = y \quad \text{za sve } y \in \langle 0,\infty\rangle . \square$$

2.18 *Pronađimo inverznu funkciju od:*
$f : \mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle,\ f(x) = 3e^{2x-5}$.

R. $f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{3} + \frac{5}{2}$.

Zaista, rješavanjem jednadžbe $f(x) = y$ po nepoznatoj variajbli x dobivamo:

$$3e^{2x-5} = y \implies e^{2x-5} = \frac{y}{3} \implies 2x - 5 = \ln\frac{y}{3}$$
$$\implies 2x = \ln\frac{y}{3} + 5 \implies x = \frac{1}{2}\ln\frac{y}{3} + \frac{5}{2}. \square$$

2.19 *Pokazati da je sljedeća funkcija bijekcija :*
$f : \mathbb{R} \to \langle B,\infty\rangle,\ f(x) = Ae^{ax+b} + B$, $a \neq 0$, $A > 0$. *Potom izračunati njenu inverznu funkciju.*

R. $f^{-1} : \langle B,\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}\ln\frac{y-B}{A} - \frac{b}{a}$,

–> VIDEO

U **zadatku 2.17** smo promatrali klasu pravaca čija je inverzna funkcija ponovno pravac iz te klase. Slično je moguće pokazati i za jednu klasu racionalnih funkcija.

2.20 *Pronađimo inverznu funkciju od racionalne funkcije*
$f : \langle 0,\infty\rangle \to \langle 0,1\rangle,\ f(x) = \frac{x}{x+2}$.

R. $f^{-1} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,\infty\rangle,\ f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$.

U **zadatku 2.14.H** smo za ovu funkciju pokazali da je bijekcija. Za inverz trebamo riješiti jednadžbu $f(x) = y$ po nepoznatoj varijabli x:

$$y = \frac{x}{x+2} \implies xy + 2y = x \implies x(y-1) = -2y$$
$$\implies x = \frac{2y}{1-y} \implies f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}. \square$$

U računskom smislu sljedeći zadatak je potpuno drukčiji od prethodnog.

2.21 Zadana je racionalna funkcija:
$f : \langle 0,\infty\rangle \to \langle 0,1\rangle,\ f(x) = \frac{x}{x+2}$.

Pokazati da je njena inverzna funkcija:

$$f^{-1} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,\infty\rangle,\ f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}.$$

Budući da u ovom zadatku ne moramo tražiti inverznu funkciju, jer su $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ istovremeno zadane, dovoljno je pokazati da su zadovoljene obadvije jednadžbe iz definicije za inverznu funkciju:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2f(x)}{1-f(x)} = \frac{\frac{2x}{x+2}}{1-\frac{x}{x+2}} = \frac{\frac{2x}{x+2}}{\frac{x+2-x}{x+2}} = x\,,$$

$$f(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}(y)+2} = \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2y}{1-y}+2} = \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2y+2-2y}{1-y}} = y\,.\square$$

Pomoću **zadatka 2.14.I** se **zadatak 2.20** može generalizirati na općenitiju klasu racionalnih funkcija, čiji je inverz ponovno u toj klasi funkcija, zanimiljivo, vidjeti sljedeći zadatak.

2.22 Neka su a, b, c tri strogo pozitivna realna broja. *Izračunati inverznu funkciju sljedeće racionalne funkcije :*

$$f : \langle 0,\infty\rangle \to \left\langle 0,\frac{a}{b}\right\rangle,\ f(x) = \frac{ax}{bx+c}.$$

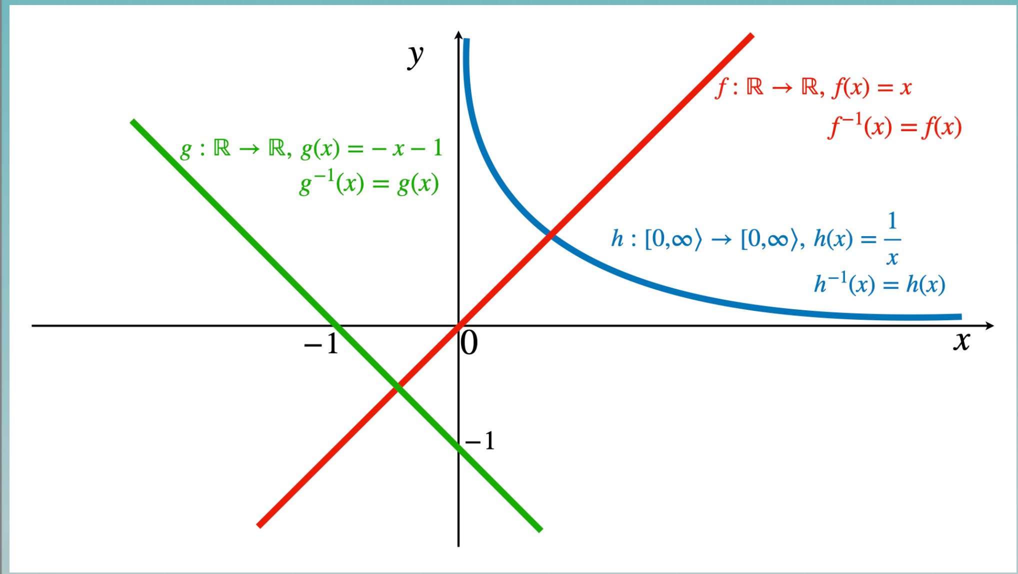
R. $f^{-1} : \left\langle 0,\frac{a}{b}\right\rangle \to \langle 0,\infty\rangle,\ f^{-1}(x) = \dfrac{cx}{-bx+a}$ **VIDEO**

Pitanje svih pitanja je: postoji li funkcija koja je sama sebi inverzna funkcija. Odgovor je potvrdan i sastavni je dio sljedećeg zadatka.

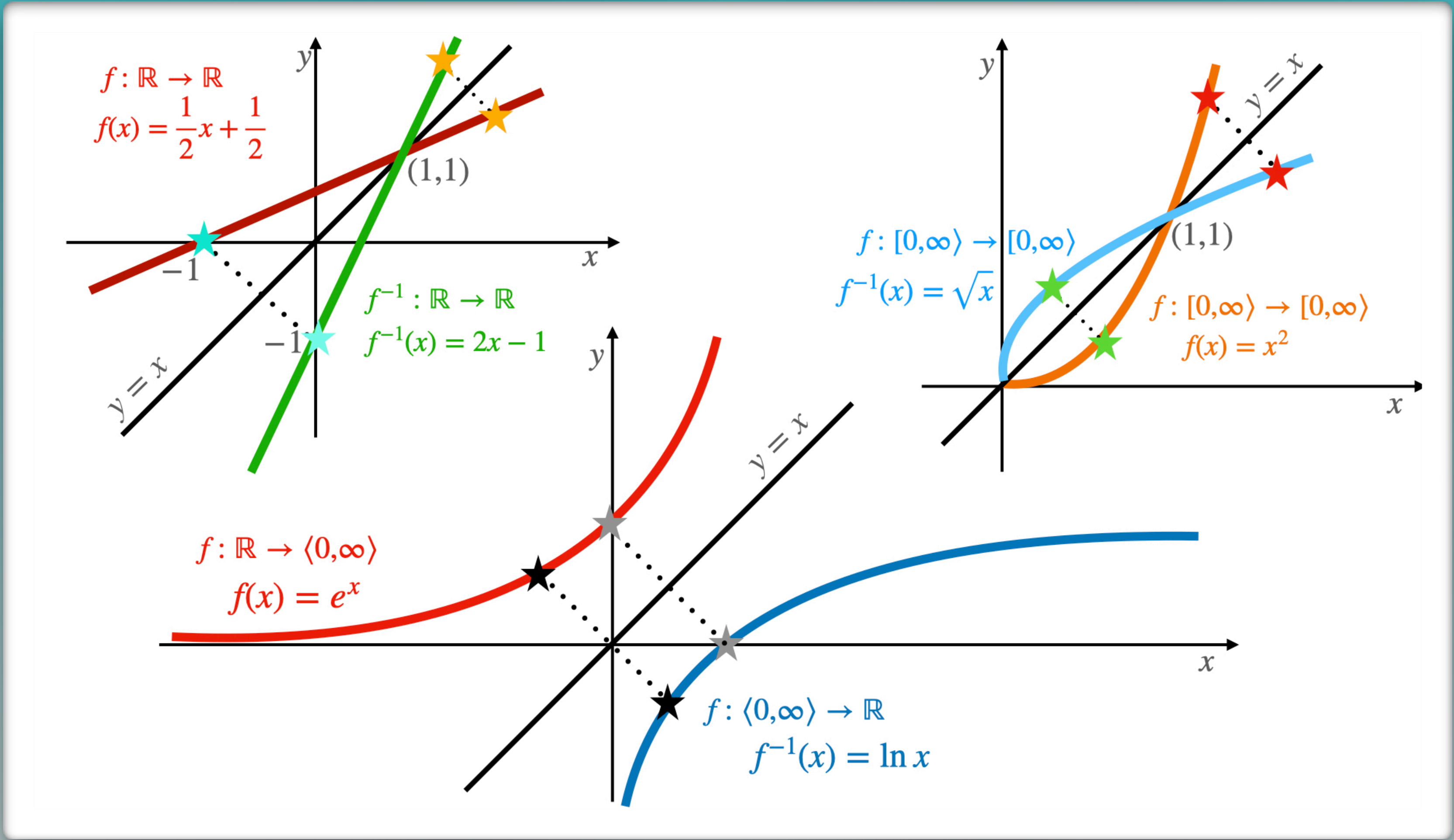
2.23 *Postoji beskonačno mnogo različitih bijekcija $f(x)$ za koje vrijedi :*

$$f^{-1}(x) = f(x),\ D(f^{-1}) = D(f),\ Im(f^{-1}) = Im(f).$$

R. vidi sliku dolje i **VIDEO**



Graf $G(f^{-1})$ inverzne funkcije $f^{-1}(x)$ možemo dobiti iz grafa $G(f)$ originalne funkcije $f(x)$ tako da $G(f)$ zrcalimo simetrično u odnosu na pravac $y = x$ koji je ujedno i dijagonala I. i III. kvadranta. Tu su neki elementarni primjeri:



Sada za bijekciju iz **zadatka 2.14.K** pronalazimo njen inverz:

2.24 *Izračunati inverznu funkciju za:*

$$f:[0,\infty\rangle \to \left[0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle,\quad f(x)=\sqrt{\frac{3x}{2x+5}}.$$

R. $f^{-1}:\left[0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle \to [0,\infty\rangle,\ f^{-1}(x)=\dfrac{5y^2}{3-2y^2}$ **VIDEO**

U rješavanju **zadatka 2.24** kao drugi način rješavanja smo koristili poznatu jednakost za dvije bijekcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$:

$$\boxed{(f_2\circ f_1)^{-1}=f_1^{-1}\circ f_2^{-1}}$$

koju **dokazujemo na sljedećoj stranici**.

Na **53. stranici** smo pokazali da restrikcija kvadratne funkcije $f(x)=x^2$ na interval $[0,\infty\rangle$ je bijekcija i ima inverznu funkciju kvadratni korijen $f^{-1}(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$. Ne zaboravimo da je $D(f^{-1})=Im(f)$. Ista ova priča vrijedi i za parne funkcije, kao u sljedećem zadatku.

2.25 **Zadana je parna potencija** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=x^{2n}$. Ovo je parna funkcija, a na **48. stranici** smo pokazali da parne funkcija nisu injekcije. No, njena restrikcija $f:[0,\infty\rangle\to[0,\infty\rangle$, $f(x)=x^{2n}$ je bijekcija. Pokažimo da je

$$f^{-1}(x)=\sqrt[2n]{x}=x^{\frac{1}{2n}}, x\geq 0.$$

Zaista:

$$f^{-1}(f(x))=(f(x))^{\frac{1}{2n}}=(x^{2n})^{\frac{1}{2n}}=x,$$

$$f(f^{-1}(y))=\left(f^{-1}(y)\right)^{2n}=\left(y^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}=y.\ \square$$

Neparne potencije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=x^{2n-1}$ su mnogo jednostavnije od parnih, jer su one samo po sebi bijekcije pa ne trebamo raditi nikakvu restrikciju. Sada možemo kompletirati priču o parnim i neparnim potencijama, koju smo još započeli na **41. stranici**:

$$f:[0,\infty\rangle\to[0,\infty\rangle, f(x)=x^{2n}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[2n]{x}=x^{\frac{1}{2n}},$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2n-1}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[2n-1]{x}=x^{\frac{1}{2n-1}},$$

gdje je $n\in\mathbb{N}$.

Prijenimo to u sljedećem zadatku:

2.26 *Pokazati da je funkcija* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^5+2}$ *bijekcija*. Potom joj izračunati inverznu funkciju.

R. $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f^{-1}(x)=\sqrt[5]{y^3-2}$.

I. način: VIDEO **II. način: VIDEO**

Neka su $f_1 : X_1 \to X_2$ i $f_2 : X_2 \to X_3$ dvije bijekcije. Do prije znamo da je tada i njihova kompozicija $f_2\circ f_1 : X_1\to X_3$ isto tako bijekcija. Štoviše, inverznu funkciju od ove kompozicije ne moramo tražiti ako već znamo inverzne funkcije od $f_1(x)$ i $f_2(x)$ nego je možemo računati po sljedećoj formuli:

$$(f_2\circ f_1)^{-1}=f_1^{-1}\circ f_2^{-1}\,.$$

Dokaz za ovu formulu. Dobro znamo da neka bijekcija $h : X_1\to X_3$ i njena inverzna funkcija $h^{-1}: X_3\to X_1$ moraju po definiciji zadovoljavati sljedeće jednakosti:

$$(h^{-1}\circ h)(x)=x,\ \forall x\in X_1 \quad \text{i} \quad (h\circ h^{-1})(y)=y,\ \forall y\in X_3\,.$$

To znači da ako uvrstimo za $h=f_2\circ f_1$ i "kandidata" za njenu inverznu funkciju $h^{-1}=f_1^{-1}\circ f_2^{-1}$ u prethodne jednakosti i pokažemo da su one zadovoljene, tada smo dokazali našu formulu. Odnosno $f_1^{-1}\circ f_2^{-1}$ nije više "kandidat" za inverznu funkciju, nego je to zaista inverzna funkcija od $f_2\circ f_1$:

$$\begin{aligned}(h^{-1}\circ h)(x) &= \big((f_1^{-1}\circ f_2^{-1})\circ(f_2\circ f_1)\big)(x)=\big(f_1^{-1}\circ(f_2^{-1}\circ f_2)\circ f_1\big)(x)=\\ &=\big(f_1^{-1}\circ f_1\big)(x)=x\\ (h\circ h^{-1})(y) &= \big((f_2\circ f_1)\circ(f_1^{-1}\circ f_2^{-1})\big)(y)=\big(f_2\circ(f_1\circ f_1^{-1})\circ f_2^{-1}\big)(y)=\\ &=\big(f_2\circ f_2^{-1}\big)(y)=y.\end{aligned}$$

Ova formula isto vrijedi za kompoziciju od bilo kojeg konačnog broja bijekcija, naravno uz ispunjen nužni uvjet ulančavanja $Im(f_{k-1})\subseteq D(f_k)$:

$$(f_n\circ\cdots\circ f_2\circ f_1)^{-1}=f_1^{-1}\circ f_2^{-1}\circ\cdots\circ f_n^{-1}$$

Pokazati ovu jednakost matematičkom indukcijom po $n\in\mathbb{N}$:)

2.2 BINARNA RELACIJA $\rho \subseteq X \times X$

U uvodu ovog **2. dijela** gradiva smo na nepraznom skupu $X \neq \varnothing$ definirali binarnu relaciju ρ kao jedan konkretan podskup od $X \times X = \{(x,y) : x \in X,\ y \in X\}$.

Relaciju zadajemo na dva načina.

1. način. Jednostavno **napišemo sve njene elemente odnosno sve njene uređene dvojke unutar vitičaste zagrade** $\{\cdots\}$. Na primjer:

$$\rho = \{(u,z),\ (z,x),\ (v,y),\ \cdots\} \subseteq X \times X\,.$$

Zašto je praktičnan ovakav način? Umjesto da pojedinačno raspisujemo koje s kime u relaciji, na primjer,

za $x, y, z \in X$ i $x\,\rho\,z,\ z\,\rho\,x,\ y\,\rho\,y, \cdots$

dovoljno je napisati:

$$\rho = \{(x,z),\ (z,x),\ (y,y),\ \cdots\} \subseteq X \times X\,.$$

To znači: $x\,\rho\,z \leftrightarrow (x,z),\ \ z\,\rho\,x \leftrightarrow (z,x),\ \ y\,\rho\,y \leftrightarrow (y,y)$.

Obratno, ako imamo uređenu dvojku $(B,A) \in \rho \subseteq X \times X$, to znači da su ova dva elementa u relaciji odnosno $B\,\rho\,A$. Naravno ovo ne mora značiti da je $A\,\rho\,B$.

2. način. Ukoliko relacija ρ ima mnogo elemenata te zbog toga nije moguće napisati sve njene uređene dvojke unutar zagrade $\{\cdots\}$, tada **relaciju zadajemo njenom osobinom**. Na primjer, neka je ρ binarna relacija na $\mathbb{Z}$ sa svojstvom:

$m\,\rho\,n$ ako i samo ako $m-n$ **djeljivo sa 3**.

To znači da ova relacija sadrži beskonačno mnogo uređenih dvojki, pa je nije bilo moguće definirati na 1. način:

$$\rho = \{\cdots,(-1,-4),\ (7,1),\ (0,3),\ \cdots\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Provjera, za samo dva od njih beskonačno mnogo:

$(-1,-4) \in \rho$ jer je $m - n = -1-(-4) = -3$ djeljivo sa 3;

$(7,1) \in \rho$ jer je $m - n = 7 - 1 = 6$ djeljivo sa 3.

Interesantno je da ova relacija zadovoljava neka svojstva kao na primjer: $(1,1) \in \rho$ jer je $1-1=0$ djeljivo sa 3, pa je isto tako $(m,m) \in \rho$ jer je $m - m = 0$ djeljivo s 3. I tako dalje….

Prema tome, osim zadavanja relacije dobro je znati provjeriti **koja svojstva dotična konkretna relacija zadovoljava ili ne zadovoljava** (lijevo i desno od strelice $\longleftrightarrow$ su dva različita načina zadavanja relacije).

- ρ **je refleksivna na** X $\Longleftrightarrow$

  $x \, \rho \, x$ za sve $x \in X$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ $(x, x) \in \rho$ za sve $x \in X$;

- ρ **je simetrična na** X $\Longleftrightarrow$

  ako je $x \, \rho \, y$ za neke $x, y \in X$, tada je također $y \, \rho \, x$

  $\longleftrightarrow \quad x, y \in X, \ (x, y) \in \rho \implies (y, x) \in \rho$;

- ρ **je tranzitivna na** X $\Longleftrightarrow$

  ako za neke $x, y, z \in X$ vrijedi $x \, \rho \, y$ i $y \, \rho \, z$, tada mora vrijediti i $x \, \rho \, z$

  $\longleftrightarrow \quad x, y, z \in X, \ (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \implies (x, z) \in \rho$.

Primijetimo da se u prvom svojstvu (refleksivnost) pojavljuje kvantifikator "za sve $x \in X$" dok se u ostalim svojstvima (simetričnost, tranzitivnost) pojavljuje kvantifikator "za neke $x, y \in X$" odnosno "za neke $x, y, z \in X$", što čini veliku razliku u provjeravanju ovih svojstava.

Kako se provjerava da neka konkretna relacija zadovoljava ili ne zadovoljava prethodna neko od prethodnih svojstava je pokazano u sljedećim zadacima.

2.27 Neka je $X = \{0,1,2\}$ i na njemu definiramo relaciju: $\rho = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (1,0), (2,1)\}$. Pokažimo: ρ **je refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna**.

Refleksivnost: $(0,0) \in \rho,\ (1,1) \in \rho,\ (2,2) \in \rho \implies (x, x) \in \rho$ za sve $x \in X$;

Simetričnost: $(0,1) \in \rho \wedge (1,0) \in \rho, (1,2) \in \rho \wedge (2,1) \in \rho$.

ρ **nije tranzitivna**: $(2,1) \in \rho \wedge (1,0) \in \rho$ ali $(2,0) \notin \rho$. $\square$

2.28 Na skupu relanih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo relaciju: $x, y \in \mathbb{R},\ x \,\rho\, y$ ako i samo ako $x < y$. Pokažimo: ρ **nije refleksivna, nije simetrična, ali je tranzitivna**.

ρ **nije refleksivna**: iako niti za jedan $x \in \mathbb{R}$ ne može biti $x < x$ dovoljno je uzeti samo jedan takav pa na primjer $1 = 1$ povlači da $1 \nless 1$ pa onda 1 nije u ovoj relaciji sa samim sobom;

ρ **nije simetrična**: ako imamo dva realna broja x i y koji su u ovoj relaciji tada je $x < y$; no znamo da nije moguće da istovremeno imamo i $y < x$, iz čega slijedi da y i x nisu u ovoj relaciji;

ρ **je tranzitivna**: neka su x, y, z tri realna broja dva po dva u sljedećoj relaciji: $x \,\rho\, y$ i $y \,\rho\, z$. Po definicije ove relacije to znači da je $x < y$ i $y < z$ što kad se nacrta na realnoj osi povlači da je i $x < z$ odnosno $x \,\rho\, z$. $\square$

2.29 Neka je ρ binarna relacija na $\mathbb{Z}$ takva da za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$m \,\rho\, n$ ako i samo ako $m - n$ **djeljivo s 2**.

Ispitati rekleksivnost, simetričnost i tranzitivnost od ρ na $\mathbb{Z}$

R. Refleksivnost: DA. Simetričnost: DA. Tranzitivnost: DA.

–> **VIDEO** ▶

Definicija. Za relaciju $\rho \subseteq X \times X$ koja je **istovremeno refleksivna , simetrična i tranzitivna kažemo ukratko da je relacija ekvivalencije**.

Prema prethodnom zadatku to znači da relacija koja je definirana u njemu je relacija ekvivalencije. Znači ako se u zadatku traži da se pokaže je li ili nije dotična relacija $\rho \subseteq X \times X$ relacija ekvivalencije to znači da za takvu relaciju provjeravamo sva tri svojstva: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost.

2.30 Na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definiramo relaciju ρ:

$z_1 \rho z_2$ ako i samo ako je $\arg z_2 = \arg z_1 + 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Ispitati je li ρ relacija ekvivalencije na $\mathbb{C}$.

R. Da! –> **VIDEO** ▶

2.31 Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo relaciju ρ:

$$x \rho y \text{ ako i samo ako je } x \leq y.$$

Pokazati da ρ **nije relacija ekvivalencije**.

R. Refleksivnost: DA. Simetričnost: NE. Tranzitivnost: DA.
–> **VIDEO** ▶

Kao što vidimo prethodna relacija na $\mathbb{R}$, koja se čita "manje ili jednako" nije relacija ekvivalencije jer **nije simetrična**. Što više, **ona je antisimetrična**.

Definicija. Relacija $\rho \subseteq X \times X$ je **antisimetrična** ako zadovoljava svojstvo:
ako su $x, y \in X$ takvi da je $x \rho y$ i $y \rho x$, tada je $x = y$.

Pjesnički rečeno: **antisimetričnost od $\rho \subseteq X \times X$ kaže da je ona simetrična samo za $x = y$, što je općenito nedovoljno da bi bila simetrična**.

Definicija. Relacija $\rho \subseteq X \times X$ je **relacija parcijalnog uređaja na skupu X** ako je istovremeno **refleksivna**, **antisimetrična i tranzitivna.**

Prema tome, za relaciju iz **zadatka 2.31** kratko možemo reći da je **relacija paricalnog uređaja na $\mathbb{R}$**.

Da li neka relacija koja je antisimetrična može biti istovremeno i simetrična? Odgovor je DA, ali samo u nekim specijalnim slučajevima, kada relacija $\rho \subseteq X \times X$ samo sadrži elemente oblika (x, x) . Logično🧐

Zašto je svojstvo relacije ekvivalencije $\rho \subseteq X \times X$ važno za skupu X objasnit ćemo na sljedećim stranicama. No prije toga postavljamo sljedeće pitanje: ako $\rho \subseteq X \times X$ nije relacija ekvivalencije, **jel je možemo nadopuniti do prve veće relacije $\tilde{\rho} \subseteq X \times X$ tako da je $\tilde{\rho}$ relacije ekvivalencija**

na X i vrijedi: $\rho \subseteq \tilde{\rho} \subseteq X \times X$. Budući da znamo da relacija iz **zadatka 2.27** nije relacija ekvivalencije nadopunit ćemo je do prve takve, koja jest relacija ekvivalencije.

2.32 Neka je $X = \{0,1,2\}$ i na njemu definiramo relaciju:

$\rho = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(1,0),(2,1)\}$.

Nadopunimo ovu relaciju s relacijom ekvivalencije $\tilde{\rho}$ na X, tako da je $\tilde{\rho}$ najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži zadanu relaciju ρ. Kao što smo provjerili u **zadatku 2.27** ova relacija je refleksivna i simetrična, **ali nije tranzitivna**. Što znači da trebamo dodati one elemente u $\tilde{\rho}$ tako da se ne pokvari refleksivnost i simetričnost a istovremeno se dobije tranzitivnost. Ovo zadnje nije funkcioniralo kod ρ jer je $(2,1) \in \rho \wedge (1,0) \in \rho$, ali $(2,0) \notin \rho$. Zbog toga u $\tilde{\rho}$ dodajemo element $(2,0)$ te provjeravamo je li $(0,2)$ isto u ρ, jer ako nije i njega trebamo dodati u $\tilde{\rho}$ za bi zadržali simetričnost. Prema tome imamo:

$$\tilde{\rho} = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(1,0),(2,1),(2,0),(0,2)\},$$

$\rho \subset \tilde{\rho} \subseteq X$, $\tilde{\rho}$ je najmanja takva relacije ekvivalencija. □

Definicija. Za neku relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq X \times X$ možemo na skupu X odrediti **klase ekvivalencije** odnosno podskupove od X koji su definirani na ovaj način:

za $a \in X$ **klasa** $[a] = \{x \in X : a \, \rho \, x\} \subseteq X$,

2.33 Na skupu $X = \{0,1,2,3\}$ definiramo relaciju $\rho \subseteq X \times X$:

$$\rho = \{(0,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}.$$

Ispitati je li ρ relacija ekvivalencije na X. Ako nije, onda je nadopuniti sa najmanjom relacijom ekvivalencije $\tilde{\rho}$, koja zadovoljava: $\rho \subseteq \tilde{\rho} \subseteq X$.

R. Refleksivnost: NE. Simetričnost: NE. Tranzitivnost: NE

$\tilde{\rho} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(0,2),(2,0)\}$

–> **VIDEO**

odnosno **u klasi $[a]$ od elementa a su svi oni elementi iz X koji su s njime u relaciji ρ** odnosno **svaka klasa sadrži u sebi međusobno ekvivalentne elemente iz skupa X**.

Iako svakom elementu iz skupa X pridružujemo jednu klasu ekvivalencije, klase međusobno mogu biti jednake. Pokazat ćemo to na sljedećem primjeru vezano uz relaciju ekvivalencije $\tilde{\rho}$ iz **zadatka 2.33**.

2.34 Na skupu $X = \{0,1,2,3\}$ zadana je relacija ekvivalencije $\tilde{\rho} \subseteq X \times X$:

$$\tilde{\rho} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (2,0)\}.$$

Na skupu X odredimo sve klase ekvivalencije u odnosu na relaciju $\tilde{\rho}$. Po definiciji klase ekvivalencije slijedi:

$$[0] = \{x \in X : 0\,\tilde{\rho}\,x\} = \{0,1,2\} \subseteq X,$$
$$[1] = \{x \in X : 1\,\tilde{\rho}\,x\} = \{0,1,2\},$$
$$[2] = \{x \in X : 2\,\tilde{\rho}\,x\} = \{0,1,2\},$$
$$[3] = \{x \in X : 3\,\tilde{\rho}\,x\} = \{3\} \subseteq X.$$

Prema tome, na skupu X u odnosu na zadanu relaciju ekvivalencije $\tilde{\rho}$ dobili smo samo dvije različite klase

$$[0] = [1] = [2] = \{0,1,2\} \neq [3] = \{3\}$$

za koje vrijedi: $X = [0] \cup [3]$, $[0] \cap [3] = \varnothing$. Još se kaže da klase $[0]$ i $[3]$ čine **particiju skupa** X, jer se međusobno ne sijeku a njihova unija je cijelu skup X . Za particiju nekog skupa vrijedi općenita definicija.

Definicija. **Podskupovi** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **skupa** X **čine particiju od** X ako je: $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ i $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$.

U **odjeljku 2.4** se mogu pogledati i drugi zadaci vezano uz binarne relacije i to po odabiru studenata i profe, također:)

2.3 EKVIPOTENTNI SKUPOVI

Skupovi $X = \{1,2,6\}$ i $Y = \{0,4,10\}$ imaju jednak broj elemenata, što se zapisuje $\text{card}(X) = \text{card}(Y) = 3$, gdje se oznaka za broj elemenata $\text{card}(X)$ čita: “kardinalni broj skupa X” ili još jednostavnija oznaka je: $|X| = |Y| = 3$, gdje se oznaka $|X|$ čita: “broj elemenata skupa X”. Budući da **imaju isti broj elemenata** to se još kraće kaže da su X i Y **ekvipotentni skupovi**.

Elemente dva proizvoljna skupa X i Y, koji imaju isti konačan broj elemenata, na primjer $k \in \mathbb{N}$, odnosno

$$\text{card}(X) = |X| = k = \text{card}(Y) = |Y|,$$

možemo numerirati od 1 do k redom:

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \ \text{ i } \ Y = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Definirajmo funkciju $f : X \to Y$ formulom $f(a_m) = b_m$ za sve $m = 1,2,\ldots,k$. Očito ova funkcija različite originale preslikava u različite slike odnosno injekcija je, te isto tako $Im(f) = Y$, pa se lako zaključuje da je f bijekcija između skupova X i Y. Ova povjesna priča je služila za motivaciju da se uvede pojam **jednakobrojnosti elemenata** dva skupa odnosno njihove **ekvipotentnosti** i za slučaj kada X i Y nisu nužno konačni.

Definicija. Kaže se da su dva neprazna skupa X i Y **ekvipotentni** odnosno **imaju jednak broj elemenata** u oznaci $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ ili $|X| = |Y|$ ako postoji barem jedna bijekcija između X i Y odnosno $\exists f : X \to Y$ takva da je $f(x)$ bijekcija.

Neka je $P(X)$ **partitativni skup** od skupa X odnosno množina svih podskupova od skupa X odnosno:

$P(X) = \{A : \ A \subseteq X\}$, specijalno $\emptyset \in P(X)$ i $X \in P(X)$.

Nije teško vidjeti da **ekvipotentnost je relacija ekvivalencije** na $P(X)$. Ne zaboravimo da notacija $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ ili $|A| = |B|$ znači da su A i B ekvipotentni skupovi:

- **refleksivnost** zašto je $\text{card}(A) = \text{card}(A)$ za sve $A \in P(X)$? funkcija $f(x) = x$ je jedna bijekcija sa skupa A na A;
- **simetričnost** – zašto $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ povlači $\text{card}(B) = \text{card}(A)$? iz $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ slijedi da postoji bijekcija $f : A \to B$; no tada je $f^{-1} : B \to A$ isto bijekcija iz čega slijedi da je $\text{card}(B) = \text{card}(A)$;
- **tranzitivnost** – zašto $\text{card}(A) = \text{card}(B) \wedge \text{card}(B) = \text{card}(C) \implies \text{card}(A) = \text{card}(C)$? iz $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ slijedi da postoji bijekcija $f : A \to B$; iz $\text{card}(B) = \text{card}(C)$ slijedi da postoji bijekcija $g : B \to C$; no tada je $h = g \circ f : A \to C$ isto bijekcija iz čega slijedi da je $\text{card}(A) = \text{card}(C)$.

Definicija. *Kaže se da skup X **ima konačno mnogo elemenata**, recimo da je $\text{card}(X) = m$ za neki $m \in \mathbb{N}$, ako postoji bijekcija $f : \{1,2,\ldots,m\} \to X$. Ako skup X nema konačno mnogo elemenata, tada se kraće kaže da X **ima beskonačno mnogo elemenata**.*

Kad su u pitanju skupovi koji imaju beskonačno mnogo elemenata, tada uobičajeni pogledi na broj elemanata "padaju u vodu". Na primjer, označimo skup svih parnih prirodnih brojeva s $2\mathbb{N}$ i skup svih neparnih prirodnih brojeva s $(2n-1)\mathbb{N}$ odnosno:

$$2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6,\ldots\}$$
$$(2n-1)\mathbb{N} = \{(2n-1) : n \in \mathbb{N}\} = \{1,3,5,\ldots\},$$

tada bi većina "odokativno" rekla da ovi skupovi imaju duplo manje elemenata od skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, budući da vrijedi: $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2n-1)\mathbb{N}$. Ovakav način razmišljanja nije u skladu s definicijom ekvipotentnosti, koju smo dalu na prethodnoj stranici. Zaštto? Pogledajmo sljedeći zadatak.

2.35 Skupovi $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ i $(2n-1)\mathbb{N}$ **su evkipotentni skupovi** odnosno kratko zapisano:

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(2\mathbb{N}) = \text{card}((2n-1)\mathbb{N}).$$

Zaista, samo treba provjeriti, što je jednostavno, da sljedeće dvije funkcije su bijekcije:

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ za sve } n \in \mathbb{N},$$
$$g : \mathbb{N} \to (2n-1)\mathbb{N},\ g(n) = 2n-1 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}. \ \square$$

Definicija. *Ako je neki skup X ekvipotentan s $\mathbb{N}$, tada se kaže da X **ima prebrojivo mnogo elemenata** ili kratko X **je prebrojivo beskonačan skup**.*

Prema tome, skupovi $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ i $(2n-1)\mathbb{N}$ su prebrojivo beskonačni skupovi. Pri tome se skup $\mathbb{N}$ **uzima kao osnovni prebrojivo beskonačan skup.**

2.36 $X = \{2n^3 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojivo beskonačan skup odnosno $\text{card}(X) = \text{card}(N)$.

[**R**. $f : \mathbb{N} \to X,\ f(n) = 2n^3 + 1$ je bijekcija. 😇]

Prethodna dva zadatka se mogu generalizirati na sljedeći način.

2.37 Neka je zadana injekcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada je $X = \{g(n) : n \in \mathbb{N}\} = Im\left(g|_{\mathbb{N}}\right)$ prebrojivo beskonačan skup odnosno $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$.

R. $f : \mathbb{N} \to X,\ f(n) = g(n)$ je bijekcija. –> **VIDEO** ▶️

Osim prebrojive beskonačnosti postoji i neprebrojiva beskonačnost. Za razliku od prebrojivo beskonačnih skupova, koje smo bijektivno preslikali na skup prirodnih brojeva, neprebrojivo beskonačne skupove bijektivno preslikavamo na skup realnih brojeva.

Definicija. Ako je neki skup X ekvipotentan s $\mathbb{R}$, tada se kaže da X **ima neprebrojivo mnogo elemenata** ili kratko X **je neprebrojivo beskonačan skup**.

Osim skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ koji se **uzima kao osnovni neprebrojivo beskonačan skup**, svi intervali u $\mathbb{R}$ su isto tako neprebrojivo beskonačni skupovi. Naravno, kao što smo ranije rekli, s beskonačno mnogobrojnim skupovim treba biti oprezan, jer mnogima je teško za prihvatiti činjenica iz sljedećeg zadatka.

2.38 Iako je $\langle 0,1\rangle \subset \langle 0,2\rangle$ i $\langle 1,4\rangle \subset \langle 1,5\rangle$, intervali $\langle 0,1\rangle$, $\langle 0,2\rangle$, $\langle 1,4\rangle$ i $\langle 1,5\rangle$ su ekvipotentni odnosno vrijedi:

$$\operatorname{card}\langle 0,1\rangle = \operatorname{card}\langle 0,2\rangle = \operatorname{card}\langle 1,4\rangle = \operatorname{card}\langle 1,5\rangle.$$

Naime, sljedeće funkcije odnosno pravci su bijekcije:

$f : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,2\rangle,\ f(x) = 2x\,;$

$g : \langle 0,2\rangle \to \langle 1,4\rangle,\ f(x) = 1 + \dfrac{3x}{2};$

$g : \langle 1,4\rangle \to \langle 1,5\rangle,\ f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4x}{3}.$

Zašto je ovo pomalo čudno? To je zato što se često brkaju pojmovi duljine intervala s njegovim brojem elemenata.
Svi ovi prethodni intervali imaju različite konačne duljine, no s druge strane, svi oni imaju beskonačno mnogo elemenata. Prebrojivo ili neprebrojivo? Odgovor: neprebrojivo mnogo elemenata, pogledati rješenje **zadatka 2.40** dolje .

Prethodni zadatak se može generalizirati.

2.39 Za bilo koja četiri realna broja $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ i $c \neq d$, vrijedi:

$$\operatorname{card}\langle a, b\rangle = \operatorname{card}\langle c, d\rangle.$$

R. $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle, f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$ je bijekcija.

–> **VIDEO** ▶️

I sad nešto prosto nevjerojatno ali ipak istinito 👀🙃

2.40 Interval $\langle -1,1\rangle$ je beskonačno neprebrojiv skup.

Štoviše, za bilo koja dva realna broja $a, b, \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, otvoreni interval $\langle a, b\rangle$ je beskonačno neprebrojiv skup odnosno

$$\operatorname{card}\langle a, b\rangle = \operatorname{card}(\mathbb{R})\ .$$

R. tri načina: –> **VIDEO** ▶️

Intuitivno je jasno, a pogotovo na primjeru skupova s konačno mnogo elemenata da vrijedi sljedeća povijesna činjenica:

Ako postoji barem jedna injekcija $f : X \to Y$, tada je

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y).$$

Ovo se lako može ilustrirati. Naime iz pretpostavke da postoji injekcija $f : X \to Y$ slijedi da je $f : X \to Im(f) \subseteq Y$ bijekcija, ovo je pravilo s **43. stranice** - **injekcija na svoju sliku je bijekcija**, što po definiciji ekvipotentnosti dva skupa znači da je $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Im(f))$. Isto tako je intuitivno jasno da iz $Im(f) \subseteq Y$ slijedi: $\mathrm{card}(Im(f)) \leq \mathrm{card}(Y)$, što sve zajedno povlači:

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Im(f)) \leq \mathrm{card}(Y).$$

2.4 STUDENTSKI I PRO-FINI ZADACI

Na kraju ovog drugog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a tijekom 2022./23. u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak iz gradiva 2. djela zajedno s rješenjem i postupkom neka ga **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti dodatne zanimljivije zadatke 😎 , koji su "pro-fini".

2.41 Odrediti realne parametre $b, c \in \mathbb{R}$ takve da za funkciju $f(x) = -\sqrt{x-b} + 3c$ vrijedi:

$$D(f) = [-2, \infty\rangle \text{ i } Im(f) = \langle -\infty, 6] .$$

[**R.** $D(f) = [b, \infty\rangle,\ Im(f) = \langle -\infty, 3c] \implies b = -2,\ c = 2$ –> **VIDEO** ▶️.]

2.42 *Pokazati da je sljedeća funkcija:*

$$f : \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{\frac{4e^x}{e^x + 2}},$$

injekcija. Kakav treba biti skup A tako da je ova funkcija i surjekcija? Za takav A izračunati inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

[**R.** $Im(f) = \langle 0, \sqrt[3]{4}\rangle \implies A = \langle 0, \sqrt[3]{4}\rangle;\quad f^{-1}(x) = \ln \frac{2x^3}{4 - x^3}$; vidi postupke rješavanja **zadatka 2.24** i **zadatka 2.26**]

2.43 Neka su $a \neq 0$ i $c \in \mathbb{R}$. *Pokazati da je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin(2x) + c$ *periodička funkcija, te joj potom odrediti temeljni period. Ako se zna da je* $Im(f) = [-1, 5]$, *tada odrediti parametre a i c.*

[**R.** temeljni period $T = \pi$ (pogledati postupak rješavanja za **zadatak 2.15.5** ; $Im(f) = [-1, 5] \implies a = 3,\ c = 2$ –> **VIDEO** ▶️.]

2.44 **JIR 29.08.2022.**

Neka su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije na skupu S.

(a) Je li nužno $\rho_1 \cup \rho_2$ relacija ekvivalencije na S ?

(b) Je li nužno $\rho_1 \cap \rho_2$ relacija ekvivalencije na S ?

[**R.** (a) NE; (b) DA]

2.45 Neka je zadan broj $N \in \mathbb{N}$. Neka je ρ binarna relacija na $\mathbb{Z}$ takva da za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$m \rho n$ ako i samo ako $m - n$ **djeljivo s** N.

Ispitati rekleksivnost, simetričnost i tranzitivnost od ρ na $\mathbb{Z}$.

[**R.** Na potpuno isti način kao u **Zadatku 2.29**]

2.46 Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je definirana binarna relacija ρ takva da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$x \rho y$ ako i samo ako $x < y$.

Tvrdnja: *relacija ρ je **antisimetrična***.

[**R. Rješenje by Ivan Pastorčić**:

													*					
X	Y	[	(	X	<	Y	)	∧	(	Y	<	X	)]	=>	(	X	=	Y)
0	0			0	0	0		0		0	0	0		1		0	1	0
0	1			0	1	1		0		1	1	0		1		0	0	1
1	0			1	0	0		0		0	0	1		1		1	0	0
1	1			1	0	1		0		1	0	1		1		1	1	1
														└>	TAUTOLOGIJA			

2.47 Neka su $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$. *Pokazati da je funkcija* $f : \langle b, \infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = a\ln(x - b) + c$ *injekcija te joj odrediti* $Im(f)$ i $f^{-1}(x)$ ako postoji.

[R. Nije teško vidjeti da je $f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ gdje su:
$f_1(x) = x - b,\ f_2(x) = \ln x$ i $f_3(x) = ax + c$ očito injekcije, pa je kompozicija tri injekcije isto injekcija. Isto tako:

$$Im(f) = f(\langle b, \infty\rangle) = a\ln\big(\langle b, \infty\rangle - b\big) + c =$$
$$= a\ln\langle 0, \infty\rangle + c = a\mathbb{R} + c = \mathbb{R}.$$

Zbog toga je ovo bijekcija pa ima inverznu funkciju:

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x-c}{a}} - b. \ \textbf{]}$$

2.48 Odrediti $Im(f)$ za funkciju $f : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - \cos x)$. *Je li ovo injekcija?*

[R. Lako se vidi da je:

$$Im(f) = f(\langle 0, 2\pi\rangle) = \ln\big(1 - \cos\langle 0, 2\pi\rangle\big) =$$
$$= \ln\big(1 - \langle -1, 1\rangle\big) = \ln\langle 0, 2\rangle = \langle -\infty, \ln 2\rangle.$$

Nije injekcija jer je recimo
$f(\pi/2) = \ln(1 - \cos\pi/2) = \ln 1 = 0 = \ln(1 - \cos 3\pi/2) = f(3\pi/2)$.
]

2.5 POPULARNA TEORIJSKA PITANJA NA ISPITIMA IZ DRUGOG DIJELA GRADIVA

• Napisati sve ekvivalentne definicije za injektivnost funkcije.

• Pokazati da je kompozicija injektivnih funkcija isto tako injektivna.

• Napisati primjer injektivne funkcije koja nije bijekcija.
• Zašto parna funkcija ili periodička funkcija nije injekcija? Kako od parne funkcije najjednostavnije napraviti injekciju?
• Napisati definiciju inverzne funkcije te pokazati da ako je originalna funkcija bijekcija da tada ona mora imati inverznu funkciju.
• Napisati primjer za bijekciju koja je jednaka svojoj inverznoj funkciji.
• Dokazati formulu za inverz kompozicije funkcija.
• U čemu je razlika između relacije ekvivalencije i relacije parcijalnog uređaja?
• Napisati primjer za konačan skup X i na njemu primjer za relaciju koja nije refleksivna niti simetrična , ali je tranzitivna.
• Napisati primjer za konačan skup X i na njemu primjer za relaciju ekvivalencije. U odnosu na takvu relaciju ekvivalencije naći sve različite klase ekvivalencije i objasni što je to particija skupa X?
• Objasni zašto je skup $X = \{n^3 - 2 : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojivo beskonačan?
• Objasni zašto omeđeni otvoreni intervali $\langle -1,1 \rangle$ i $\langle 2,7 \rangle$ imaju jednak broj elemenata odnosno ekvipotentni su, te zašto su obadva neprebrojivo beskonačni skupovi?

TREĆI DIO

REALNE FUNKCIJE REALNE VARIJABLE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3.1 Monotonost funkcija

U drugom dijelu gradiva smo definirali parne i neparne funkcije, te periodičke funkcije, a vezano uz pojam injektivnosti funkcije. Naime pokazali smo da **ako je funkcija parna ili periodička tada ona nije injektivna** (**48. i 49. stranica**).

Sada ćemo definirati monotonost funkcije (padajuća ili rastuća funkcija) i pokazati da **strogo monotona funkcija (strogo padajuća ili strogo rastuća) funkcija mora biti injektivna**. No prije toga slijedi definicija za ove pojmove te kako se dokazuje po definiciji monotonost neke funkcije. Pri tome I je bilo kakav interval, zatvoren ili otvoren, omeđen ili neomeđen odnosno:

$$I = \langle a,b\rangle,\ I = \langle a,b],\ I = [a,b\rangle,\ I = [a,b]$$

$$I = \mathbb{R},\ I = \langle -\infty,b\rangle,\ I = \langle -\infty,b],\ I = \langle a,\infty\rangle,\ I = [a,\infty\rangle.$$

Definicija. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je (**strogo**) **rastuća** odnosno (**strogo**) **padajuća** na intervalu $I \subseteq D(f)$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$: $f(x)$ je ***rastuća na*** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$: $f(x)$ je ***strogo rastuća na*** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$: $f(x)$ je **padajuća na** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$: $f(x)$ je ***strogo padajuća na*** I.

Još se opisno kaže da za razliku od rastuće funkcije, **padajuća funkcija okreće nejednakost** u smislu da: " $<$ " $\longrightarrow$ " $\ge$ " ili " $<$ " $\longrightarrow$ " $>$ ".

Zbog kratkoće izgovora, kaže se da je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (**strogo**) **monotona** na intervalu $I \subseteq D(f)$ ako je (**strogo**) **rastuća** ili (**strogo**) **padajuća** na intervalu I.

Primijetimo da se nije lako igrati s nejednakostima a pogotovo nije zgodno po veličini uspoređivati dvije vrijednosti $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Umjesto toga je nešto lakše uspoređivati njihovu razliku $f(x_2)-f(x_1)$ s nulom. Odnosno umjesto dokaza da je $f(x_1) \le f(x_2)$ ekvivalentno je pokazati $f(x_2)-f(x_1) \ge 0$. Zbog toga ćemo prethodnu definiciji ponovno napisati u ovim terminima.

Definicija*. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je (**strogo**) **rastuća** odnosno (**strogo**) **padajuća** na intervalu $I \subseteq D(f)$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

$x_1 < x_2 \implies f(x_2)-f(x_1) \ge 0$: $f(x)$ je ***rastuća na*** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_2)-f(x_1) > 0$: $f(x)$ je ***strogo rastuća na*** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_2)-f(x_1) \le 0$: $f(x)$ je ***padajuća na*** I;

$x_1 < x_2 \implies f(x_2)-f(x_1) < 0$: $f(x)$ je ***strogo padajuća na*** I.

3.1 *Pokazati da je funkcija* $f(x) = 5x^2 - 1$:

a) *strogo padajuća na* $\langle -\infty, 0]$;
b) *strogo rastuća na* $[0, \infty\rangle$.

a) Neka su $x_1, x_2 \in \langle -\infty, 0]$ takvi da je $x_1 < x_2$. Želimo pokazati negativnost razlike $f(x_2) - f(x_1)$ pa računamo:

$$f(x_2) - f(x_1) = (5x_2^2 - 1) - (5x_1^2 - 1) = 5x_2^2 - 5x_1^2 =$$
$$= 5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0.$$

Zašto je zadnji izraz strogo negativan? Iz pretpostavke da je $x_1 < x_2$ slijedi $x_2 - x_1 > 0$, a iz pretpostavke da su $x_1, x_2 \in \langle -\infty, 0]$ slijedi $x_1 < 0$ i $x_2 \leq 0$ pa je $x_1 + x_2 < 0$. Zbog toga je

$$5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = (+) \cdot (-) < 0.$$

Sada po Definiciji* slijedi da je $f(x)$ **strogo padajuća na** $\langle -\infty, 0]$.

b) Neka su sada $x_1, x_2 \in [0, \infty\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$. Želimo pokazati pozitivnost razlike $f(x_2) - f(x_1)$ pa računamo:

$$f(x_2) - f(x_1) = (5x_2^2 - 1) - (5x_1^2 - 1) = 5x_2^2 - 5x_1^2 =$$
$$= 5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Zašto je zadnji izraz strogo pozitivan? Iz pretpostavke da je $x_1 < x_2$ slijedi $x_2 - x_1 > 0$, a iz pretpostavke da su $x_1, x_2 \in [0, \infty\rangle$ slijedi $x_1 \geq 0$ i $x_2 > 0$ pa je $x_1 + x_2 > 0$. Zbog toga je

$$5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = (+) \cdot (+) > 0.$$

Sada po Definiciji* slijedi da je $f(x)$ **strogo rastuća na** $[0, \infty\rangle$.
Q.E.D.

3.2 Pokazati strogu monotonost na zadanim intervalima sljedećih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^3$ je **strogo rastuća na** $[0, \infty\rangle$ -> **VIDEO**;
b) $f(x) = 3 \sin x$ je **strogo rastuća na** $[0, \frac{\pi}{2}]$ -> **VIDEO**.

Uvijek je korisno na umu imati sljedeći "trik", koji vrijedi za **neparne funkcije** (sjetimo se: $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$).

3.3 Zadana je **neparna neprekinuta funkcija** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, te neka je $b > 0$. Ako je $f(x)$ **rastuća na** $[0, b\rangle$, tada je $f(x)$ **rastuća na** $\langle -b, b\rangle$. Ako je $f(x)$ **strogo rastuća na** $[0, b\rangle$, tada je $f(x)$ **strogo rastuća na** $\langle -b, b\rangle$. -> [**R.** Ovaj zadatak ćemo riješiti kada budemo radili neprekinute funkcije u 6. dijelu gradiva:)]

Prethodni zadatka isto tako vrijedi ako se riječ "raste" svugdje zamijeni s "pada". Ili ako se interval $[0,b\rangle$ zamijeni s zatvorenim intervalom $[0,b]$ (ili $[0,\infty\rangle$). Sada zahvaljujući **zadatku 4.3** možemo proširiti monotonost iz **zadatka 4.2** i na lijevu stranu oko nule, kao što je navedeno u sljedećem zadatku. Naravno možemo riješiti ovaj zadatak po definiciji monotonosti kao u **zadatku 4.2** .

3.4 Pokazati strogu monotonost na zadanim intervalima sljedećih funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=4x^3$ je **strogo rastuća na** $\langle -\infty,\infty\rangle$;

b) $f(x)=3\sin x$ je **strogo rastuća na** $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Monotonost i kompozicija funkcija se dobro slažu:)

Teorem. *Neka su $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dvije (strogo) monotone funkcije redom na intervalima I i J (omeđeni ili neomeđeni), gdje zbog ulančavanja kompozicije pretpostavljamo da je $f(I)\subseteq J$. Tada je i kompozicija $g\circ f$ (strogo) monotona funkcija na invervalu I.*

Neupitno su lagani dokazi svih tvrdnji koje se tiču monotonosti i kompozicija funkcija, kao što je pokazano u rješavanju sljedećeg zadatka. Verzija ovog zadatka s dvije funkcije, što je nešto lakše, se pojavila kao teorijski zadatak na MI 26.11.2019.-3.a)

3.5 **MI 26.11.2019.-3.a)** Zadane su tri funkcije *$f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gdje je $f(x)$ (strogo) rastuća na intervalu I, $g(x)$ je (strogo) rastuća na intervalu J i $h(x)$ je (strogo) rastuća na intervalu K, $f(I)\subseteq J$ i $g(J)\subseteq K$. Tada je i kompozicija $h\circ g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (strogo) rastuća na I.*

Dokaz je dosta jednostavan, jer za sve $x_1,x_2\in I$ vrijedi:

$$x_1<x_2 \implies f(x_1)\le f(x_2)\ \Big|\, g \implies$$

$$g(f(x_1))\le g(f(x_2))\ \Big|\, h \implies h(g(f(x_1)))\le h(g(f(x_2))).\ \square$$

Ono što je upitno je karakter monotonosti na izlazu kompozicije u ovisnosti o karakteru monotonosti pojedinih funkcija unutar kompozicije. Pod karakterom monotonosti mislimo na "raste", "strogo raste", "pada" ili "strogo pada". Naime vrijedi sljedeći princip: **karakter monotonosti kompozicije funkcija ovisi o broju padajućih funkcija unutar kompozicije**. O tome govori sljedeći zadatak.

3.6 Zadana je kompozicija $f(x)=(f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1)(x)$, gdje je $f_k(x)$ (strogo) monotona na intervalu I_k (omeđen ili neomeđen), $k=1,2,\dots,n$, gdje zbog ulančavanja kompozicije pretpostavljamo da je $f_k(I_k)\subseteq I_{k+1}$.

A. Ako je **broj (strogo) padajućih** funkcija u $f(x)$ **paran** (nula je paran broj), tada je $f(x)$ **(strogo) rastuća**;

B. Ako je **broj (strogo) padajućih** funkcija u $f(x)$ **neparan**, tada je $f(x)$ **(strogo) padajuća**;

[**RA.** -> **VIDEO** ▶ ; **RB.** -> **VIDEO** ▶]

Primjena prethodnog zadatka je velika. U sljedećem zadatku ćemo dokazati injektivnost funkcije na dva načina: **po definiciji i po zadatku 4.6**.

3.7 **MI 22.11.2021.–2.b)**

Je li funkcija $f(x) = \sqrt[3]{e^{4x} - 1}$ strogo rastuća na $\mathbb{R}$? Obrazložite!

[**R.** DA **I. način** po definiciji rastuće funkcije:-> **VIDEO**

II. način kao kompozicija rastućih funkcija -> **VIDEO**]

3.8 **A.** Pokazati da je funkcija

$f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ strogo rastuća na $\mathbb{R}$ [**R:** VIDEO] ;

B. Pokazati da je funkcija

$f(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ strogo padajuća na $\langle 0, \infty \rangle$ [**R:** VIDEO] .

Primjena monotonosti na injektivnost funkcije je dosta popularna, te se zbog toga nerijetko koristi u dokazu injektivnosti neke složene funkcije, umjesto dokaza injektivnosti pomoću definicije.

3.9 ***Ako je funkcija $f(x)$ strogo monotona na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, tada je ona injektivna na I.***

Zaista, pretpostavimo da je na primjer $f(x)$ strogo padajuća. Na dalje, za svaki $x_1, x_2 \in I$ za koji je $x_1 \neq x_2$ ili je $x_1 < x_2$ ili $x_1 > x_2$. Da bi pokazali injektivnost od $f(x)$ treba pokazati da su i slike različite odnosno $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zaista, ako je $x_1 < x_2$ tada slijedi $f(x_1) > f(x_2)$, jer je $f(x)$ padajuća na I, pa smo pokazali da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ako je pak $x_1 > x_2$ tada slijedi $f(x_1) < f(x_2)$, jer je $f(x)$ padajuća na I, pa smo i u ovom slučaju pokazali da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prema tome $x_1 \neq x_2$ povlači da je $f(x_1) \neq f(x_2)$ za svaki $x_1, x_2 \in I$ što znači po definicij da je $f(x)$ injekcija na I. Analogno se pokaže da ako je $f(x)$ strogo rastuća na I da je tada isto $f(x)$ injekcija na I. **Q.E.D.**

Dokazivanje injektivnosti preko stroge monotonosti je često uspješniji način od definicije injektivnosti. Na primjer, kada dokazujemo da je desni dio parabole injektivna funkcija $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, jer bi htjeli definirati njen inverz a to je korijen funkcija, onda u dokazu da $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ zapravo koristimo korijenovanje kao inverznu operacija-funkciju, što nije skroz korektno. Međutim, dokaz da je ova funkcija strogo monotona je "čist-ko-suza ":

$$0 \le x_1 < x_2 \implies f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \\ = (x_2 - x_1)\cdot(x_1 + x_2) > 0,$$

što dokazuje da je $f(x) = x^2,\ x \ge 0$ strogo rastuća a samim time i injektivna funkcija na $[0,\infty\rangle$. Q.E.D.

3.10 **MI 22.11.2021.–2.c)**

Neka je $f(x) = \sqrt[3]{e^{4x} - 1}$. Pokazati da je $f : \mathbb{R} \to Im(f)$ bijekcija.

[**R:** očito je surjekcija jer je funkcija na svoju sliku (princip sa **43. stranice**); injektivnost slijedi iz **zadataka 4.7 i 4.9**.

Na dalje, dolazi ne izostavna **veza između monotonosti originalne i inverzne funkcije**.

Teorem. Neka je $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bijekcija. Tada vrijedi:* $f(x)$ *je strogo monotona* $\Longleftrightarrow f^{-1}(x)$ *je strogo monotona. Pri tome karakter monotonosti od* $f(x)$ *i* $f^{-1}(x)$ *je isti.* [**R.** Dokaz na **VIDEU** ▶️]

Na primjer, pomoću **zadataka 4.7 i 4.9** znamo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to Im(f)$ definirana kao $f(x) = \sqrt[3]{e^{4x} - 1}$ strogo rastuća bijekcija na $\mathbb{R}$. Po prethodnom teoremu slijedi da je i njena inverzna funkcija isto tako strogo rastuća bijekcija.

3.11 Pomoću prethodnog teorema argumentirati zašto vrijede sljedeće tvrdnje:

a) *funkcija* $f(x) = \sqrt{x}$ *je strogo rastuća na* $[0,\infty\rangle$ (podsjeti se **53. stranice**);

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{2}$ *je strogo rastuća na* $\langle 0,\infty\rangle$ (sjeti se **zadatka 2.18**);

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *je strogo rastuća na* $\mathbb{R}$ (sjeti se **57. stranice**).

3.2 Neke popularne elementarne funkcije: ↓⤵️

3.2.1 $f(x) = \sin x$ i $f^{-1}(x) = \arcsin x$
 $g(x) = \cos x$ i $g^{-1}(x) = \arccos x$

Znamo iz drugog dijela gradiva (podsjeti se na **49. stranicu**) da periodička funkcija nije injektivna. Zbog toga $f(x) = \sin x$ **nije injektivna na** $\mathbb{R}$, jer je periodička s temeljnim periodom $T_0 = 2\pi$. Međutim, iz drugog dijela gradiva smo naučili kako se takva funkcija može restringirati na neki podskup njene domene tako da je dobivena restrikcija injektivna, a na svoju sliku je i surjektivna, pa kao takva je bijekcija i možemo joj naći inverz. U ovom slučaju po dogovoru uzimamo da je dotična restrikcija definirana kao:

$$f(x) = \sin x,\ x \in I_0 := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

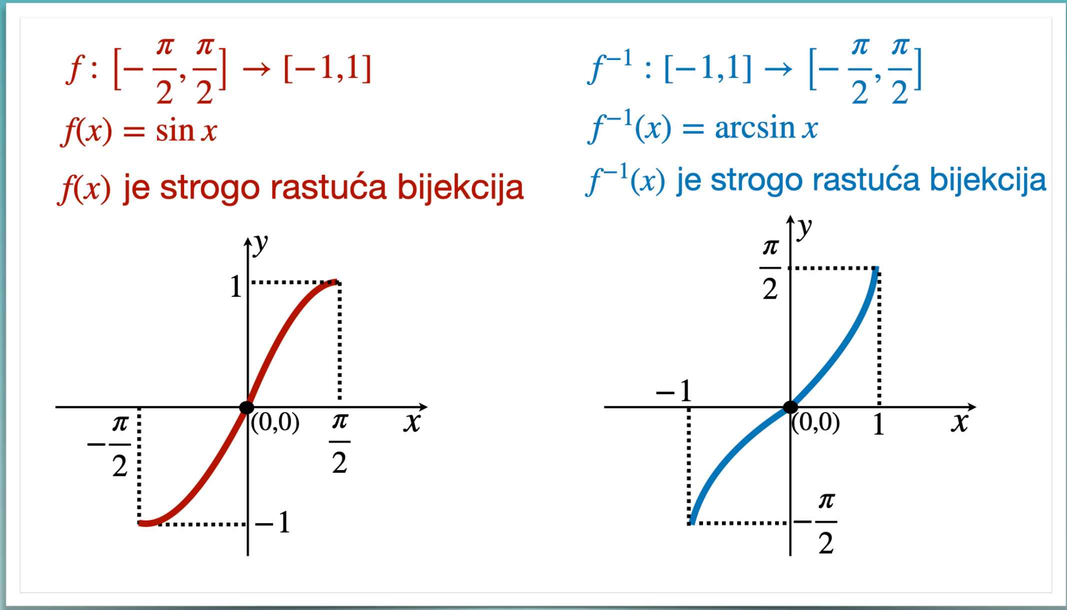
Ovo je bijekcija, pa zbog toga ima inverz, koga označavamo sa $\arcsin x := f^{-1}(x)$ (čitati: "**arkus sinus od x**"). Budući da je $D(f^{-1}) = Im(f)$ i $Im(f^{-1}) = D(f)$, te je $f(x)$ strogo rastuća na I_0, to po prethodnim razmatranjima zaključujemo:

$f : I_0 \to [-1,1],\ f(x) = \sin x,\ f(x)$ je strogo rastuća na I_0,

$f^{-1} : [-1,1] \to I_0,\ f^{-1}(x) = \arcsin x,$

$f^{-1}(x)$ je strogo rastuća na $[-1,1]$,

te graf od $f^{-1}(x) = \arcsin x$ dobivamo zrcalnom simetrijom grafa $f(x) = \sin x,\ x \in I_0$ u odnosu na pravac $y = x$:



Za razliku od sinus funkcije $f(x) = \sin x$, kosinus funkcija $f(x) = \cos x$ je u nešto složenijoj situaciji jer nije neparna oko $x = 0$ već je **parna funkcija**. Mi dobro znamo da parna i periodička fukcija nije injektivna, pa po jednom ili po drugom $f(x) = \cos x$ **nije injektivna na** $\mathbb{R}$**.** Za razliku od sinus funkcije ne možemo uzeti interval oko $x = 0$ za injektivnu restrikciju od $f(x) = \cos x$, jer je kosinus parna funkcija. U ovakvom slučaju jedino pametno rješenje je uzeti resktrikciju:

$$f(x) = \cos x,\ x \in I_\pi := [0,\pi].$$

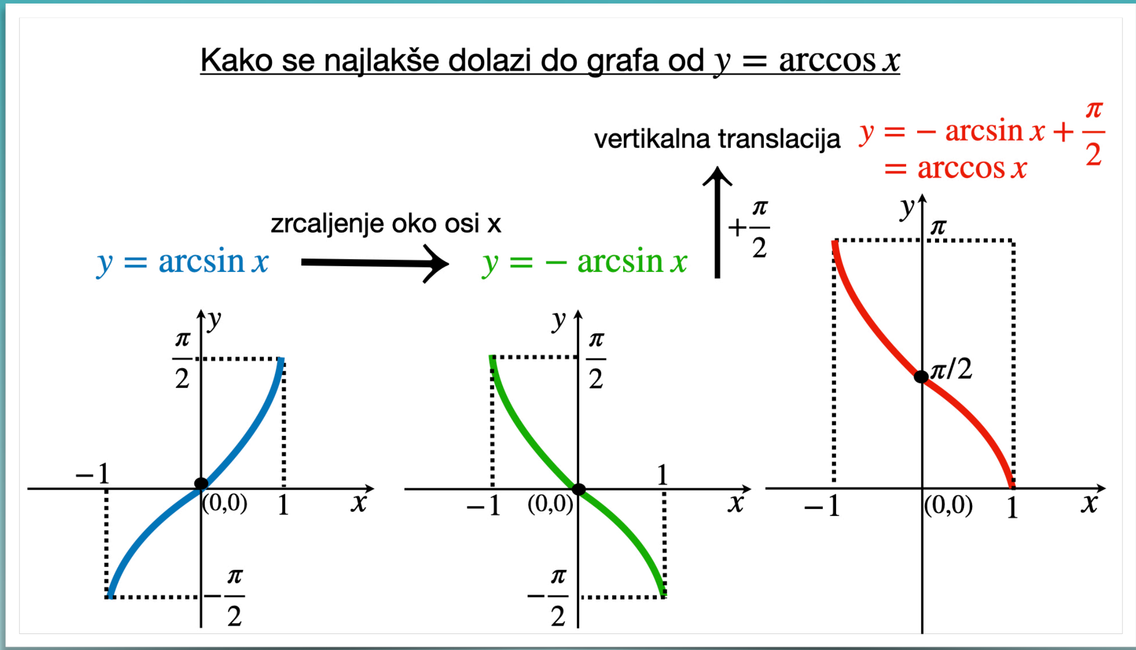
Ovo je bijekcija, pa zbog toga ima inverz, koga označavamo sa $\arccos x := f^{-1}(x)$ (čitati: "**arkus kosinus od x**"). Budući da je $D(f^{-1}) = Im(f)$ i $Im(f^{-1}) = D(f)$, te je $f(x)$ strogo padajuća na I_π, to po prethodnim razmatranjima zaključujemo:

$f : I_\pi \to [-1,1],\ f(x) = \cos x,\ f(x)$ je strogo padajuća na I_π,

$f^{-1} : [-1,1] \to I_\pi,\ f^{-1}(x) = \arccos x,$

$f^{-1}(x)$ je strogo padajuća na $[-1,1]$,

te graf od $f^{-1}(x) = \arccos x$ možemo (ali i ne moramo) dobiti zrcalnom simetrijom grafa $f(x) = \cos x,\ x \in I_\pi$ u odnosu na pravac $y = x$. Ovo nije tako jednostavno kao u slučaju sinus funkcije, jer je $\cos 0 = 1 \neq 0$, pa **zrcalna simetrija grafa kosinus funkcije oko pravca $y = x$ je nepredvidiva**. Zbog toga je sljedeći način za dobivanje grafa od $f^{-1}(x) = \arccos x$ mnogo lakši. Primijenit ćemo dvije transformacije (zrcaljenje u odnosu na $x-$ os i vertikalnu translaciju) grafa od



$y = \arcsin x$, kao na slici gore. Zašto je:

$$\arccos x = -\arcsin x + \frac{\pi}{2}\ ?$$

Odnosno, zašto je : $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$?

Znamo da je: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.
Zbog toga je:
$$\sin\left(-\arccos x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}\cos(\arccos x)-\cos\frac{\pi}{2}\sin(\arccos x)=x,$$
iz čega slijedi da je $\arcsin x=-\arccos x+\frac{\pi}{2}$. $\square$

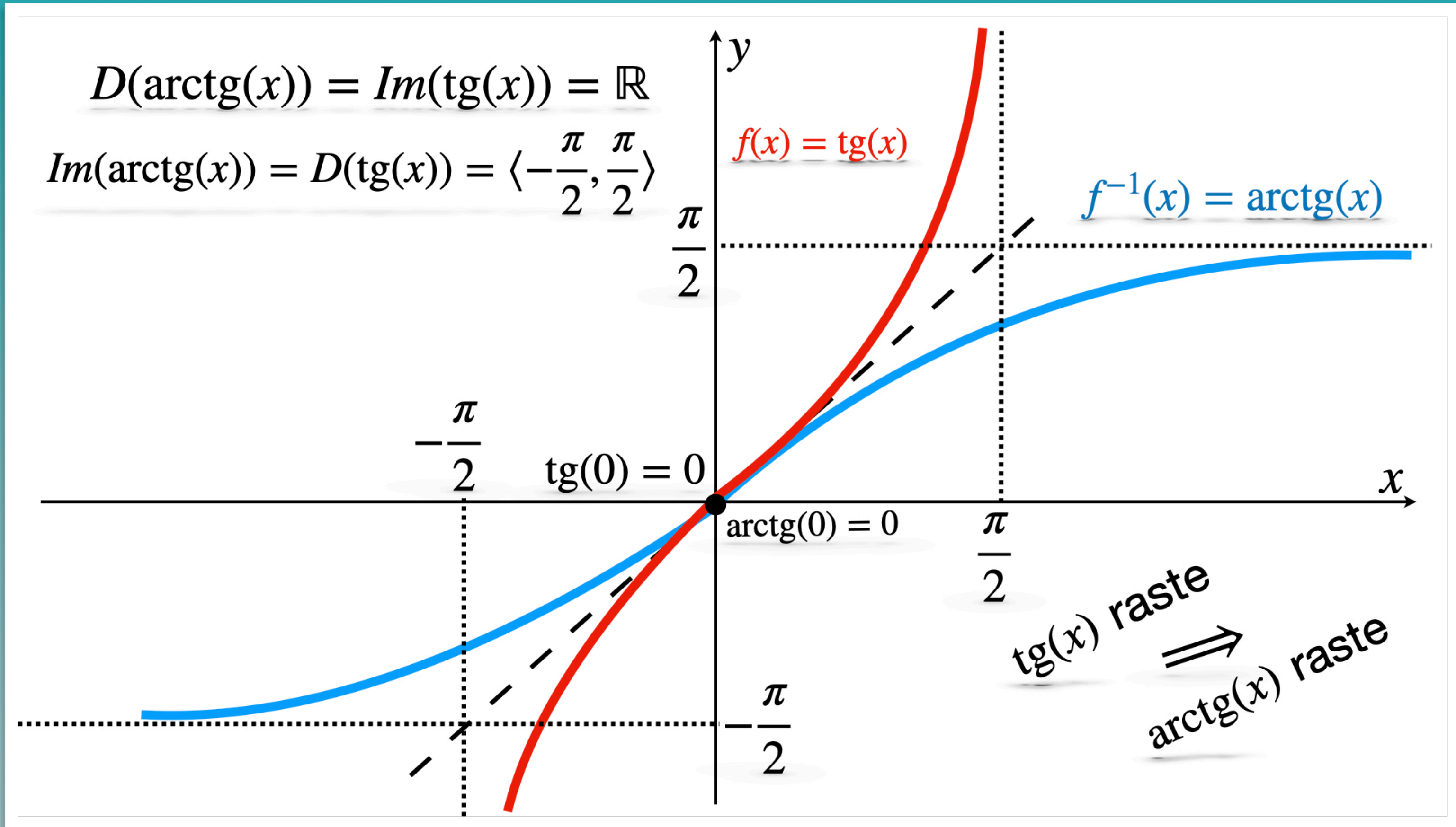
3.2.2 $f(x)=\mathrm{tg}(x)$ i $f^{-1}(x)=\mathrm{arctg}x$ $g(x)=\mathrm{ctg}(x)$ i $g^{-1}(x)=\mathrm{arc\,ctg}x$

Trigonometrijske funkcije $y=\mathrm{tg}(x)$ (čitati: "**tangens od x**") i $y=\mathrm{ctg}(x)$ (čitati: "**kotangens od x**") su definirane kao kompozicije pripadne racionalne funkcije i trigonometrijskih funkcija $y=\sin(x)$ i $y=\cos(x)$:
$$\mathrm{tg}(x):=\frac{\sin x}{\cos x}\quad \text{i}\quad \mathrm{ctg}(x):=\frac{\cos x}{\sin x}\quad (\mathrm{ctg}(x):=\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}).$$
Direktno iz ove definicije možemo zaključiti mnogo toga:

- $y=\mathrm{tg}(x)$ i $y=\mathrm{ctg}(x)$ su **neparne** funkcije :
$$\mathrm{tg}(-x):=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\mathrm{tg}(x),$$
$$\mathrm{ctg}(-x):=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=-\mathrm{ctg}(x)\;;$$
- $y=\mathrm{tg}(x)$ i $y=\mathrm{ctg}(x)$ su periodičke funkcije s temeljnim periodom $T_0=\pi$ (još se kaže $\pi-$**periodičke**) ;
- $D(\mathrm{tg}(x))=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- $D(\mathrm{ctg}(x))=\{x\in\mathbb{R}:\sin x\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$;
- $y=\mathrm{tg}(x)$ i $y=\mathrm{ctg}(x)$ **nisu injektivne** na svojim domenama (jer su periodičke);
- pripadne resktrikcije ovih funkcija su bijekcije i imaju definirane svoje inverze:

$$f:\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{tg}(x)\implies$$
$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle,\ f^{-1}(x):=\mathrm{arctg}(x);$$
$$f:\langle 0,\pi\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{ctg}(x)\implies$$
$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\langle 0,\pi\rangle,\ f^{-1}(x):=\mathrm{arcctg}(x)\;;$$

- $y=\mathrm{arctg}(x)$ je "sjajna" funkcija koja bijektivno preslikava cijeli $\mathbb{R}$ na interval $\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$; osim toga, $y=\mathrm{arctg}(x)$ je **strogo rastuća** na $\mathbb{R}$ i izvrstan je "**prigušivač**":
$$\mathrm{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}\ \text{ i }\ \mathrm{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$ - **vidi sliku dolje**:

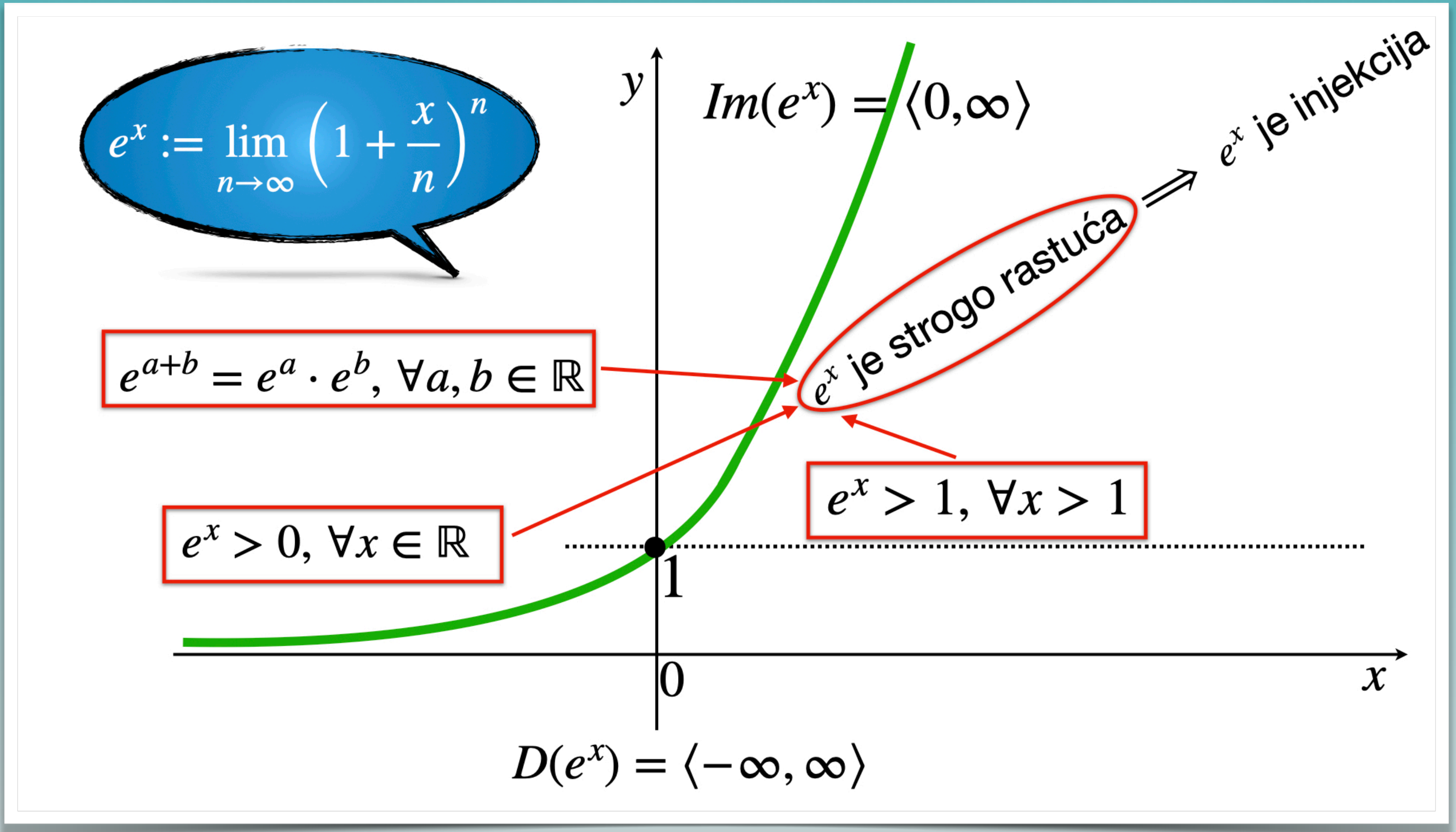

$D(\mathrm{arctg}(x)) = Im(\mathrm{tg}(x)) = \mathbb{R}$
$Im(\mathrm{arctg}(x)) = D(\mathrm{tg}(x)) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
y
$f(x) = \mathrm{tg}(x)$
$f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x)$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{tg}(0) = 0$
x
$\mathrm{arctg}(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$ raste
$\Longrightarrow$
$\mathrm{arctg}(x)$ raste

3.2.3 $f(x) = e^x$ i $f^{-1}(x) = \ln x$

Kao što vidimo s crteža, postoje neke esencijalne tvrdnje iz kojih slijede mnoga druga svojstva eksponencijalne funkcije:

3.12 *Pokazati*:

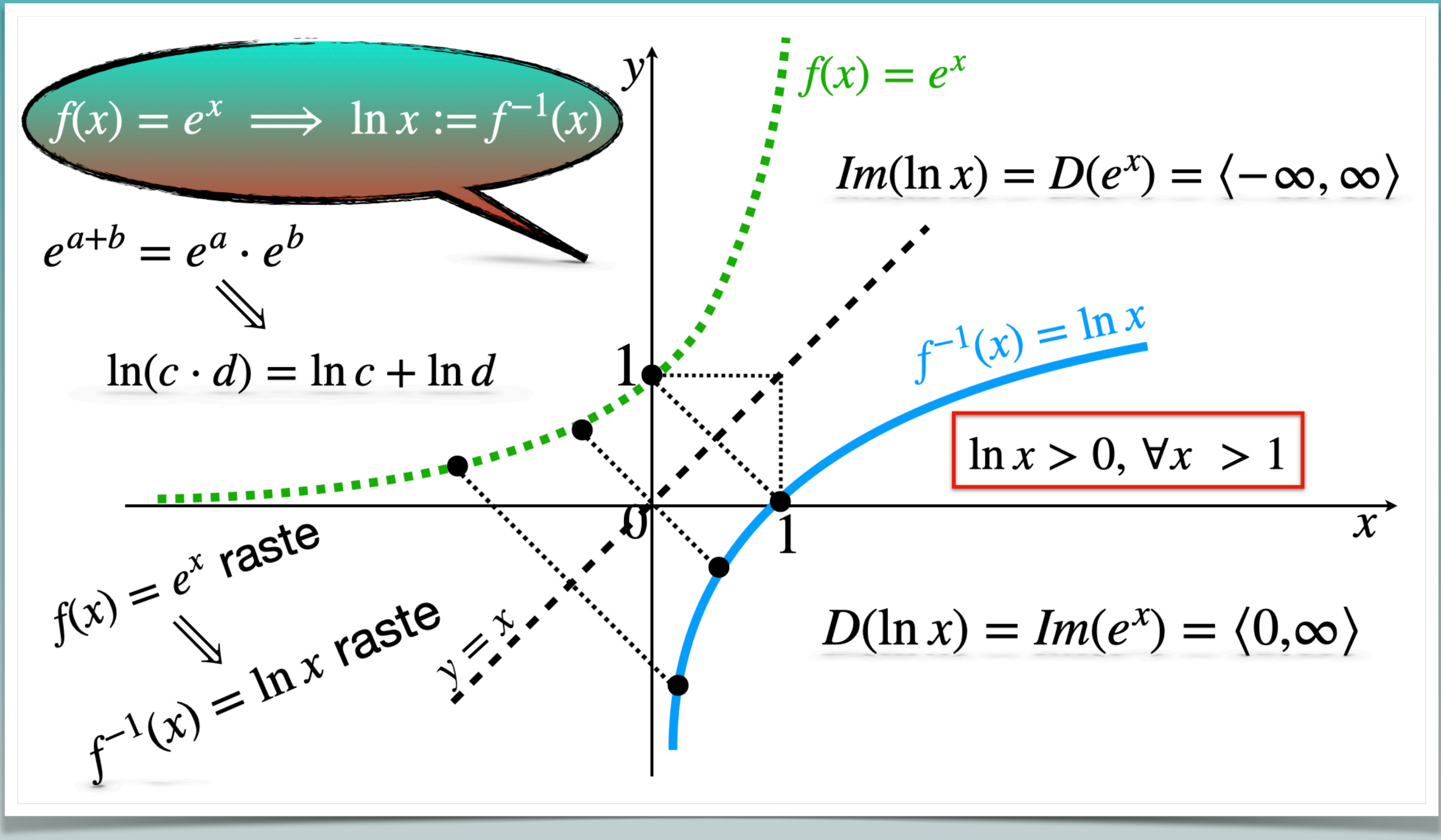
$(e^{a+b} = e^a e^b, \forall a, b \in \mathbb{R}) \wedge \ (e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \wedge$ $(e^x > 1, \forall x > 0) \implies f(x) = e^x$ *je strogo rastuća funkcija* $\implies f(x) = e^x$ *je injekcija.* [**R: VIDEO**]



Kao što vidimo s crteža dolje, postoje neke esencijalne tvrdnje iz kojih slijede mnoga druga svojstva logaritamske funkcije:

3.13 Pokazati: • $e^{a+b} = e^a e^b$, $\forall a, b \in \mathbb{R} \implies$ $\ln(c \cdot d) = \ln c + \ln d$, $\forall c, d \in \langle 0, \infty \rangle$; [**R:** VIDEO]

• $f(x) = e^x$ *je strogo rastuća* $\implies$ $f^{-1}(x) = \ln x$ *je strogo rastuća* [Teorem na **100. stranici**].



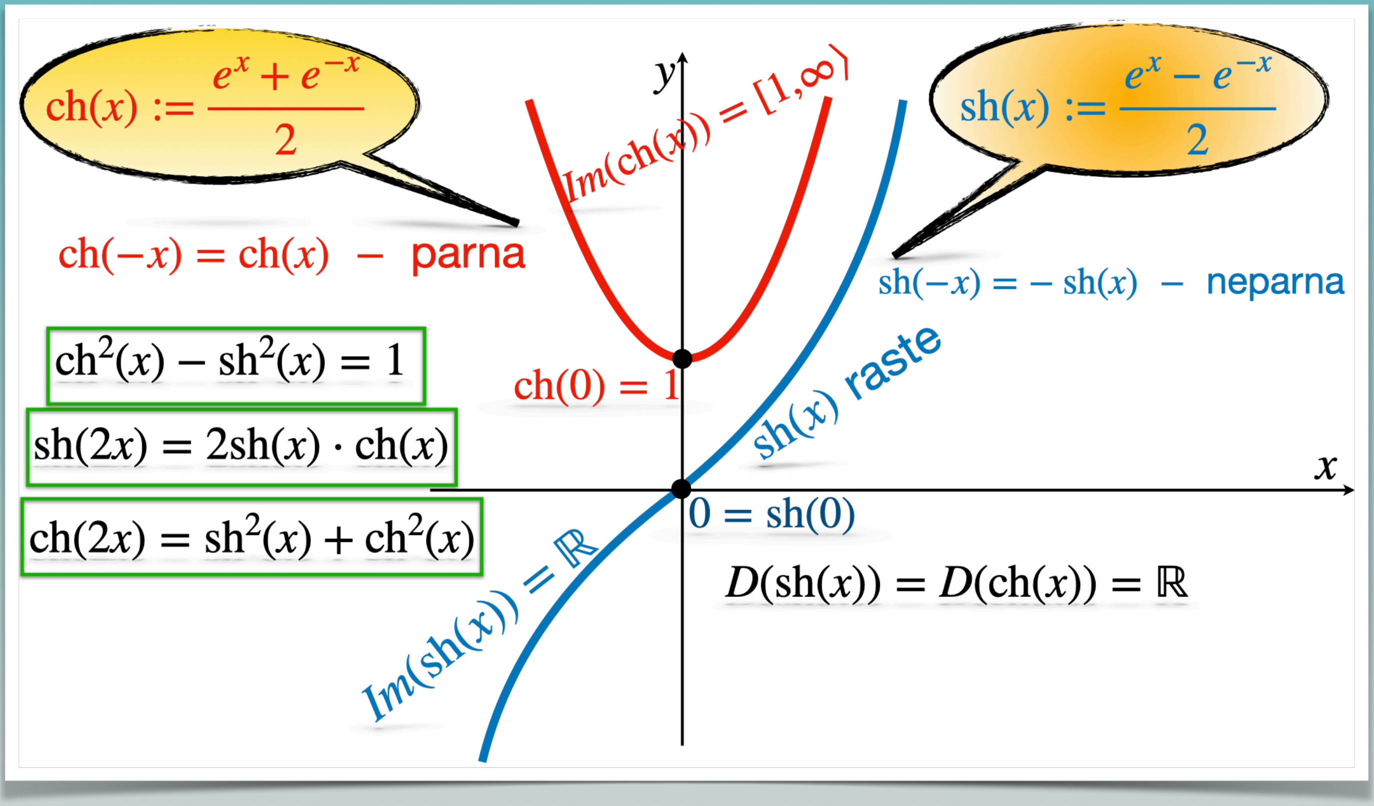
3.2.4 $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ i $g(x) = \mathrm{ch}(x)$

Kao što vidimo s crteža dolje, funkcije $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ **sinus hiperbolni** i $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ **kosinus hiperbolni** su eksplicitno definirane pomoću eksponencijalnih funkcija e^x i e^{-x}, kojie bitno utječu na ove dvije hiperbolne funkcije:

3.14 *Pokazati da vrijede sljedeći osnovni identiteti za sinus i kosinus hiperbolnu funkciju*:

- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x) \cdot \mathrm{ch}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. [**R:** VIDEO ▶]

Primijetimo da za trigonometrijske funkcije sinus i kosinus vrijedi: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Ako bi nacrtali dvije krivulje u ravnini koje su zadane formulama redom $x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t)$ i $x(t) = \mathrm{ch}(t),\ y(t) = \mathrm{sh}(t)$, tada bi dobili dvije bitno različite krivulje. [**R:** ovo je gradivo Matan 2]



3.2.5 $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ i $f^{-1}(x) = \mathrm{arsh}(x)$

Budući da je $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ eksplicitno zadana pomoću eksponencijalnih funkcija e^x i e^{-x} , to je i njena inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \mathrm{arsh}(x)$ isto tako eksplicitno zadana, ali pomoću inverznih funkcija od e^x i e^{-x}, kao u sljedećem zadatku.

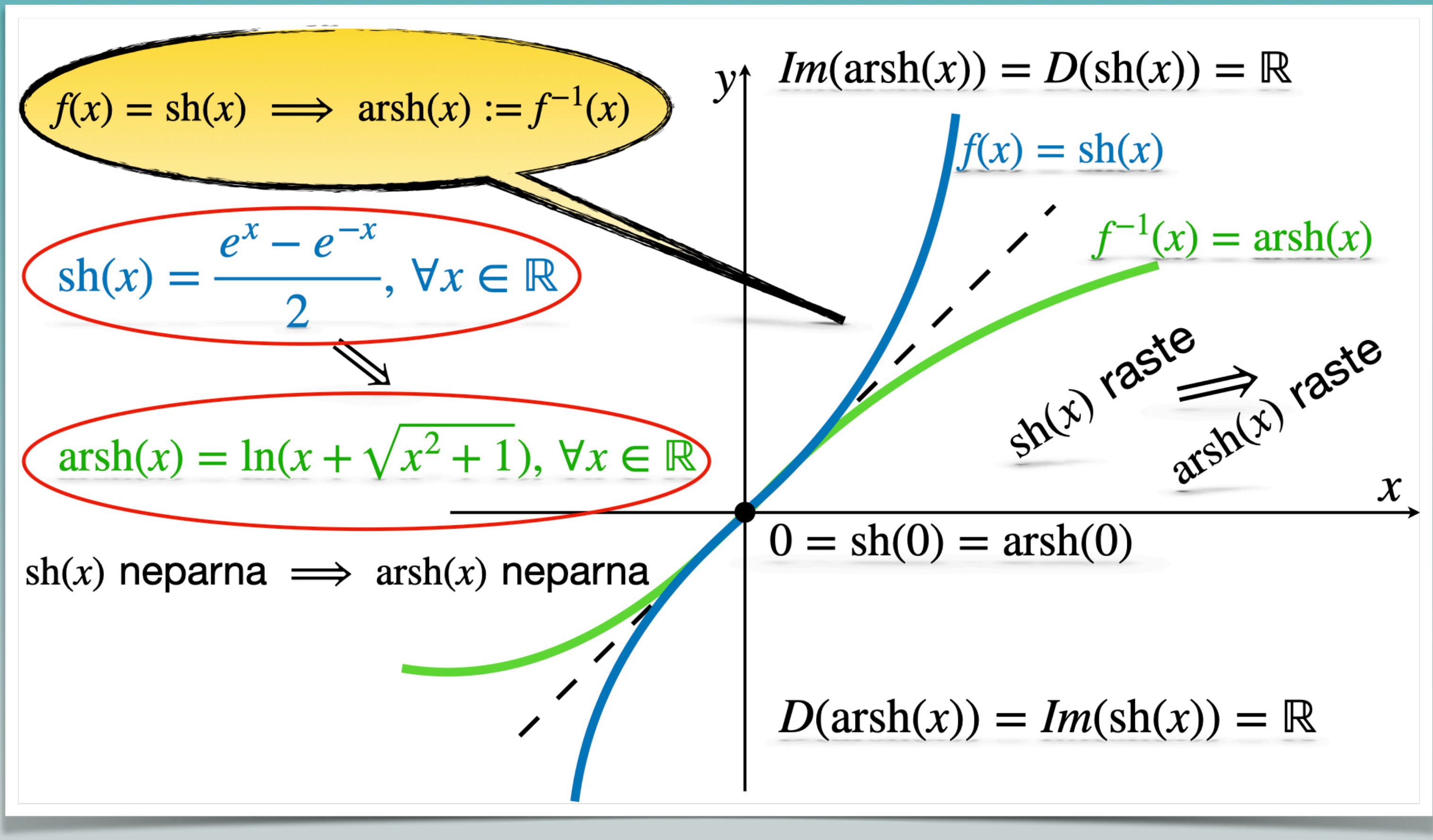
3.15 *Pokazati:* • $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \forall x \in \mathbb{R}$

[**R:** VIDEO] ;

- $\mathrm{sh}(x)$ *neparna* $\Longrightarrow$ $\mathrm{arsh}(x)$ *neparna,*
- $\mathrm{sh}(x)$ *raste* $\Longrightarrow$ $\mathrm{arsh}(x)$ *raste*

[vidi Teorem na **100. stranici** .]



3.2.6 $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ i $f^{-1}(x) = \mathrm{arch}(x)$

Budući da je $f(x) = \mathrm{ch}(x),\ x \geq 0$ eksplicitno zadana pomoću eksponencijalnih funkcija e^x i e^{-x} , to je i njena inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \mathrm{arch}(x)$ isto tako eksplicitno zadana, ali pomoću inverznih funkcija od e^x i e^{-x}, kao u sljedećem zadatku.

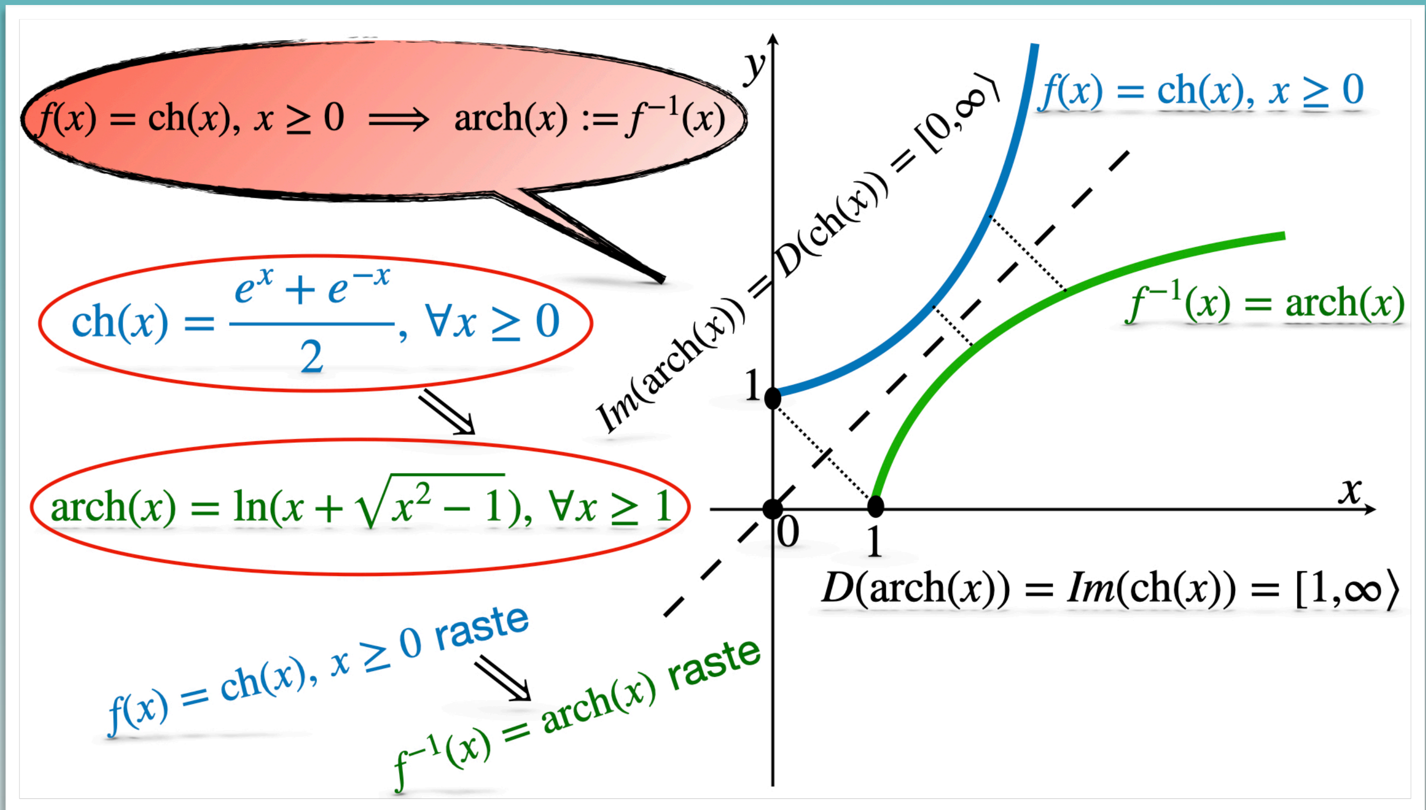
3.16 *Pokazati:* • $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \geq 0 \implies$

$$\mathrm{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$$

[**R: VIDEO**] ;

• $\mathrm{ch}(x)$ *raste na* $[0,\infty\rangle \implies \mathrm{arch}(x)$ *raste na* $[1,\infty\rangle$

[vidi Teorem na **100. stranici**] ;



Ne zaboravimo da je funkcija $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ **parna pa zbog toga nije injektivna, pa nema inverznu funkciju**. Zbog toga, umjesto nje ovdje promatramo njenu restrikciju na $[0,\infty\rangle$: $f(x) = \mathrm{ch}(x),\ x \geq 0$.

3.2.7 $f(x) = \text{th}(x)$ i $g(x) = \text{cth}(x)$

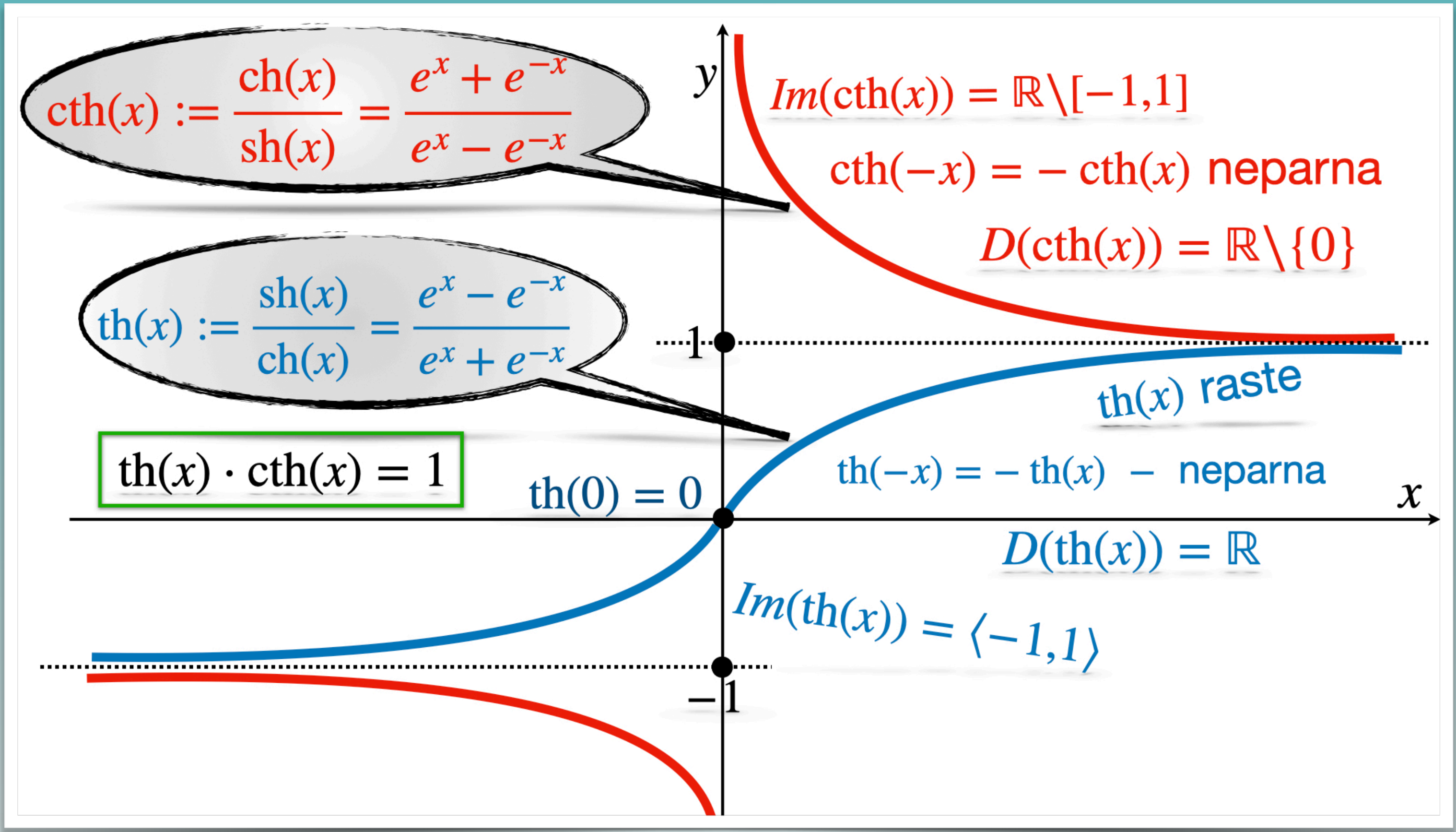
Hiperbolne funkcije $f(x) = \text{th}(x)$ i $f(x) = \text{cth}(x)$ su po definiciji izvedenice od $f(x) = \text{sh}(x)$ i $f(x) = \text{ch}(x)$, a ove dvije su pak izvedenice od eksponencijalnih funkcija e^x i e^{-x}. Zbog toga se funkcije $f(x) = \text{th}(x)$ i $f(x) = \text{cth}(x)$ često zapisuju i koriste u eksponencijalnim obliku, kao na slici i sljedećem zadatku.

3.17 *Pokazati:*

• $\text{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ i $\text{cth}(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$;

• $f(x) = \text{th}(x)$ je neparna i rastuća funkcija na $\mathbb{R}$ (podsjeti se **zadatka 4.8**);

• *vidi* sliku dolje!



3.3 Domena složenih funkcija

Osnovni princip domene - područja definicije neke funkcije se ogleda u tome da **funkcija koliko god bila složena na svakom svom mjestu mora biti dobro definirana** ili matematički rečeno: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ **definirana**$\}$. Dva su razloga zašto postupak traženja domene može biti složen:

1) **inverzne funkcije $f^{-1}(x)$ od većine elementarnih funkcija $f(x)$ imaju zahtjev - uvjet na domenu**; ali one nisu tome "krive" nego je "kriva" slika od originalne funkcije jer dobro znamo da vrijedi: $D(f^{-1}) = Im(f)$;

2) **pravilo dobrog ulančavanja funkcija unutar njihove kompozicije:** sjetimo se da bi na primjer kompozicija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ bila dobro definirana, tada nužno mora vrijediti $Im(f) \subseteq D(g)$.

Kao podsjetnik svega što smo prije napravili, a vezano uz domene elementarnih funkcija, na jednom mjestu ćemo zapisati domene onih elementarnih funkcija (inverzne funkcije) **koje imaju uvjet na domenu** (za one koje nemaju uvjet na domenu imamo $D(f) = \mathbb{R}$):

$$D(\sqrt{x}) = Im(x^2, x \geq 0) = [0,\infty\rangle;$$

$$D(\sqrt[2n]{x}) = Im(x^{2n}, x \geq 0) = [0,\infty\rangle;$$

$$D(\ln x) = Im(e^x) = \langle 0,\infty\rangle;$$

$$D(\arcsin x) = Im\left(\sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1,1];$$

$$D(\arccos x) = Im\left(\cos x, x \in [0,\pi]\right) = [-1,1];$$

$$D(\mathrm{arch}(x)) = Im\left(\mathrm{ch}(x), x \geq 0\right) = [1,\infty\rangle;$$

$$D(\mathrm{arcth}(x)) = Im\left(\mathrm{cth}(x), x \neq 0\right) = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle.$$

Kako se realiziraju koraci 1) i 2) u traženju domene neke složene funkcije prezentiramo u nekoliko jednostavnijih zadataka.

3.18 *Pronaći domenu funkcije:*

$$f(x) = \sqrt{3x+1} - \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt[3]{x-1}.$$

Postupak rješavanja provodimo u tri koraka:

1) *uvjeti*: $3x + 1 \geq 0$ i $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$;

2) *rješenja uvjeta*:

$$3x + 1 \geq 0 \implies x \geq -\frac{1}{3},$$
$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \implies -2 \leq x \leq 2;$$

3) *presjek*: $D(f) = [-\frac{1}{3}, \infty\rangle \cap [-2,2] = [-\frac{1}{3}, 2]$. □

3.19 *Pronaći domenu funkcije:*

$$f(x) = \operatorname{arch}(2-x) + 5\arccos\frac{x+1}{4} - 2\operatorname{arctg}(x^2-1).$$

Postupak rješavanja provodimo u tri koraka:

1) *uvjeti*: $2 - x \geq 1$ i $-1 \leq \frac{x+1}{4} \leq 1$;

2) *rješenja uvjeta*:

$2 - x \geq 1 \implies x \leq 1$,

$-1 \leq \frac{x+1}{4} \leq 1 \implies -4 \leq x+1 \leq 4 \implies -5 \leq x \leq 3$;

3) *presjek*: $D(f) = \langle -\infty, 1] \cap [-5,3] = [-5,1]$. □

U prethodna dva zadatka smo unutar funkcija "$\arcsin$" i "$\arccos$" imali jednostavne razlomke redom $\frac{x}{2}$ i $\frac{x+1}{4}$, za koje je lako bilo riješiti dvostruke nejednakosti redom:

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \text{ i } -1 \leq \frac{x+1}{4} \leq 1.$$

Međutim, ako unutar "$\arcsin$" ili "$\arccos$" imamo mnogo složeniji razlomak, kao na primjer $\arcsin\frac{1}{x+2}$, tada je znatno teže nego gore riješiti pripadnu nejednakost:

$$-1 \leq \frac{1}{x+2} \leq 1.$$

Zašto? **Jer predznak nazivnika u ovom razlomku mijenja predznak pa ne možemo kao u dva prethodna slučaja pomnožiti nejednakosti s ovim nazivnikom**. Kako se radi u ovakvom slučaju, objašnjeno je u sljedećem primjeru.

3.20 Pronaći domenu funkcije:

$$f(x) = e^{3x} + \arcsin\frac{1}{x+2} + \ln(16 - x^2).$$

[**R:** $D(f) = \langle -4, -3] \cup [-1, 4\rangle$ **->** **VIDEO**]

Što bi se promijenilo u rezultatu prethodnog zadatka ako bi umjesto "$\ln$" funkcije imalu "$\sqrt{\ }$"? O tome govori sljedeći zadatak.

3.21 Pronaći domenu funkcije:

$$f(x) = e^{3x} + \arcsin\frac{1}{x+2} + \sqrt{16 - x^2}.$$

[**R:** $D(f) = [-4, -3] \cup [-1, 4]$ **->** **VIDEO**]

U sljedećem zadatku je jako važno riješavati nejednakosti s apsolutnom vrijednosti, koja se bazira na sljedećim elementarijama ($a > 0$):

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a\,,$$
$$|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ ili } x \geq a\,,$$

ili zapisano u intervalnom obliku:

$$|x| \leq a \iff x \in [-a, a]\,,$$
$$|x| \geq a \iff x \in \langle -\infty, -a] \cup [a, \infty\rangle.$$

3.22 Pronaći domenu funkcije:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - x) + \sqrt{\ln \frac{1}{|x-2|}}\,.$$

[**R:** $D(f) = [1,3] \backslash 2 = [1,2\rangle \cup \langle 2,3]$ **–>** **VIDEO**]

Što bi se desilo kada bi u prethodnom zadatku izraz $|x-2|$ promjenio mjesto, kao u sljedećem zadatku?

3.23 Pronaći domenu funkcije:

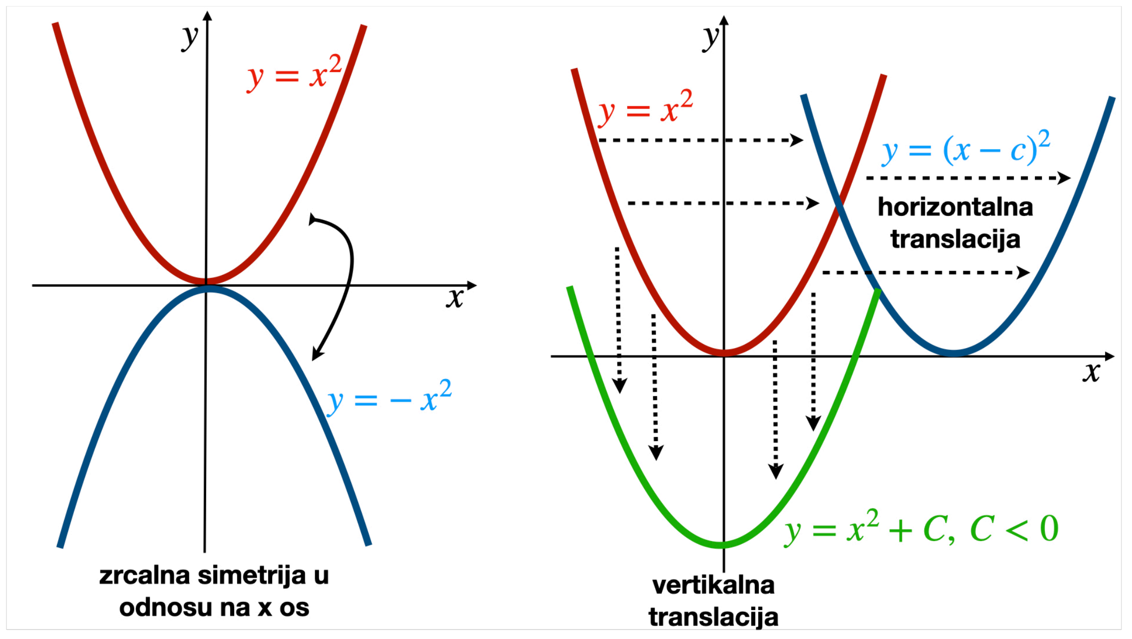
$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - x) + \sqrt{\ln|x-2|}\,.$$

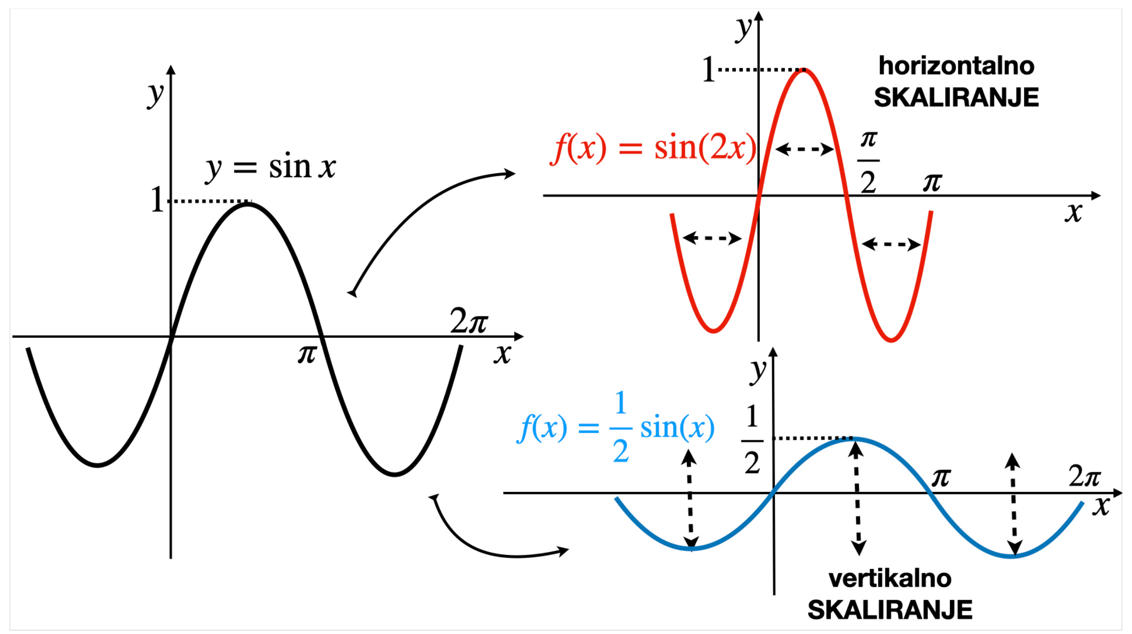
[**R:** koristiti elementarije o nejednakosti $|x-2| \geq 1$ s ove stranice: $D(f) = \langle -\infty, 1] \cup [3, \infty\rangle$]

3.4 Transformacije nad funkcijama

Zbog jednostavnijeg izražavanja, za trenutak kvadratnu funkciju $f(x) = x^2$ (i trigonometrijsku funkciju $f(x) = \sin(mx)$) identificiramo s njenim grafom-parabolom (tj. sinusoidom), pa ćemo govoriti *parabola* $y = x^2$ (tj. sinusoida $y = \sin(mx)$) (svaka od sljedećih transformacija je vidljiva na slikama desno):

- **zrcalna simetrija** parabole $y = x^2$ **u odnosu na** $x-$**os** je parabola $y = -x^2$;
- **horizontalna translacija** parabole $y = x^2$ **za broj** $c > 0$ je parabola $y = (x - c)^2$;
- **vertikalna translacija** parabole $y = x^2$ **za broj** $C > 0$ je parabola $y = x^2 + C$;
- **horizontalno skaliranje** sinusoide $y = \sin x$ **za broj** $c \neq 0$ je sinusoida $y = \sin(cx)$;
- **vertikalno skaliranje** sinusoide $y = \sin x$ **za broj** $C \neq 0$ je sinusoida $y = C \cdot \sin(x)$.





Ili općenito, transformacije nad grafom realne funkcije realne varijable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su redom:

- **zrcalna simetrija** grafa od $y = f(x)$ **u odnosu na** $x-$**os** je graf funkcije $y = -f(x)$;
- **horizontalna translacija** grafa od $y = f(x)$ **za broj** $c > 0$ je graf funkcije $y = f(x - c)$;
- **vertikalna translacija** grafa od $y = f(x)$ **za broj** $C > 0$ je graf funkcije $y = f(x) + C$;
- **horizontalno skaliranje** grafa od $y = f(x)$ **za broj** $c \neq 0$ je graf funkcije $y = f(cx)$;
- **vertikalno skaliranje** sinusoide $y = \sin x$ **za broj** $C \neq 0$ je graf funkcije $y = C \cdot f(x)$.

3.24 *Ako parabolu $y = x^2$ prvo zcalimo oko x-osi, a potom dobivenu funkciju horizontalno transliramo za $c = 3$ i na kraju vertikalno transliramo za $C = 5$, tada dobivamo graf koje funkcije?*

Rješenje:

$$y = x^2 \longrightarrow y = -x^2 \longrightarrow y = -(x-3)^2 \longrightarrow y = -(x-3)^2 + 5,$$

pa smo na kraju dobili parabolu $y = -(x-3)^2 + 5$. □

Prethodni zadatak smo mogli napisati u drukčijoj formi, no postupak je isti:)

3.25 *Nacrtati graf funkcije $f(x) = -(x-3)^2 + 5$ koristeći elementarne transformacije nad funkcijama?*

Rješenje: crtamo redom grafove sljedećih funkcija:

$y = x^2,\ y = -x^2,\ y = -(x-3)^2,\ y = -(x-3)^2 + 5.$ □

3.26 *Nacrtati graf funkcije $f(x) = -\ln(1 + x),\ x > 1.$*

Rješenje: crtamo redom grafove sljedećih funkcija:

$$y = \ln x,\ y = \ln(x+1),\ y = -\ln(x+1).$$

Naravno, **redoslijed primjene transformacija može biti i drukčiji**, pa rezultat ne ovisi o ovom rasporedu:

$$y = \ln x,\ y = -\ln x,\ y = -\ln(x+1).$$ □

3.27 **LJIR 4.7.2022.–2.a)** Skicirati graf funkcije:

$$f(x) = |\ln(x) - 2|,\ x > 0\ .$$

[**R:** koristiti transformacije nad grafom funkcije **–>** **video**]

Korisno je znati i primjeniti sljedeću činjenicu:

monotonost funkcije ne ovisi o primjeni translacije (horizontalne ili vertikalne) te pozitivnog skaliranja (horizontalna ili vertikalna) dokaz na**–>** **VIDEO**.

Primjena ove činjenice je pokazana u sljedećem zadatku

3.28 ZIR 7.2.2022.–2.b) Dokazati injektivnost funkcije:

$$f(x) = 2\arccos(x) - \pi, \; x \in [-1,1]\,.$$

[**R:** koristimo da strogo rastuća funkcija mora biti injekcija, te da se stroga monotonost ne mijenja primjenom odgovarajućih transformacija **–>** **VIDEO**]

3.29 Ako je $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$, tada *pokazati* da je funkcija $f : \langle b, \infty \rangle \to \mathbb{R}, f(x) = a\ln(x-b) + c$ strogo rastuća funkcija. Potom koristeći tranformacije nad grafom nacrtati njen graf.

[R. Lako se vidi da je $f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ gdje su: $f_1(x) = x - b$, $f_2(x) = \ln x$ i $f_3(x) = ax + c$ elementarne strogo rastuće funkcije, jer je $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$. **]**

3.30 Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(2 - \cos x)$ odrediti:

a) intervale gdje je $f(x)$ strogo rastuća;

b) intervale gdje je $f(x)$ strogo padajuća.

[R. Primijetimo da je $f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ gdje je: $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = 2 - x$, $f_3(x) = \ln x$. Ako na nekom intervalu I imamo da $\cos x$ strogo pada tada $2 - \cos x$ strogo raste na I pa onda i $f(x) = \ln(2 - \cos x)$ strogo raste na I , jer je kompizicija dvije strogo rastuće fje. Ako na nekom intervalu J imamo da $\cos x$ strogo raste tada $2 - \cos x$ strogo pada na J pa onda i $f(x) = \ln(2 - \cos x)$ strogo pada na I jer je kompizicija strogo padajuće i strogo rastuće fje. Zbog toga na $I =$ funkcija $f(x)$ je strogo rastuća, a na $J =$ funkcija $f(x)$ je strogo padajuća. **]**

3.5 STUDENTSKI I PRO-FINI ZADACI

Na kraju ovog četvrtog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a tijekom 2022./23. u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak iz ovog dijela gradiva zajedno s rješenjem i postupkom neka ga **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti dodatne zanimljivije zadatke😎 , koji su "pro-fini".

3.31 **DIR 14.9.2021. – 2.b)**
Eliminirati hiperbolne funkcije iz funkcije

$$f(x) = 2\operatorname{ch}(\ln x),\ x > 0,$$

a potom riješiti algebarsku jednadžbu:

$$2\operatorname{ch}(\ln x) = 6x\,.$$

[**R:** $f(x) = x + \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **–>** **VIDEO**▶️]

3.32 Riješiti jednadžbu:

$$\cos(2\arcsin x) = \cos(2\arccos x),\ x \in [-1,1].$$

[**R:**, $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ **–>** **VIDEO**▶️]

3.33 Pretpostavimo da je neka funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća na nekom intervalu I. Pokazati:

1. $y = C \cdot f(x)$ je rastuća na I ako je $C > 0$ i padajuća na I ako je $C < 0$;
2. $y = f(x + C)$ je rastuća za bilo kakav $C \in \mathbb{R}$;
3. $y = f(x) + C$ je rastuća za bilo kakav $C \in \mathbb{R}$.

3.34 **MI 25.11.2020.–3.b)** Skicirati graf funkcije:

$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) + 2,\ x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

[**R: oprez** kad radimo transformacije nad sinusoidom **–>** **VIDEO**▶️]

3.35 Zadani su proizvoljni brojevi $m \in \mathbb{N}, a > 0, b \in \mathbb{R}$. Ispitati je li funkcija $f(x) = \sqrt[m]{e^{ax} - b}$ strogo monotona na intervalu $I = [(\ln b)/a, \infty\rangle$.

[R. Kao prvo se dana funkcija može napisati kao kompozicija tri elementarne funkcije:

$f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$, $f_1(x) = \sqrt[m]{x}$, $f_2(x) = x - b$ i $f_3(x) = e^{ax}$,

gdje su $f_k(x)$ strogo rastuće funkcije pa prema tome je i $f(x)$ strogo rastuća odnosno strogo monotona na I . **]**

ČETVRTI DIO

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

GOMILIŠTA / LIMES NIZA REALNIH BROJEVA:

Stara narodna kaže: "Limes u niza je jedinstven, a gomilišta može biti i više, pa čak i cijela gomila, možda i beskonačno…."

4.1 DEFINICIJE, TEOREMI I POSLJEDICE

Niz realnih brojeva možemo zadati na nekoliko različitih načina:

1) jednostavnim **nabrajanjem članova** niza; na primjer:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots ;$$

2) **općim članom** a_n ; na primjer: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$;

3) **rekurzivno**: $a_1 = c$, $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$, $n \geq 1$; na primjer, niz koji smo naveli pod 1) i 2) možemo rekurzivno zapisati kao:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n,\ n \geq 1;$$

4) niz a_n možemo smatrati **kao funkciju** $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, gdje zakon pridruživanja $y = a(n)$ kraće zapisujemo $a_n := a(n)$; ako znamo što je realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(n) = a(n)$, onda je niz ustvari **restrikcija** ove funkcija na skup $\mathbb{N}$; na primjer, niz $a_n = 1/n$ je restrikcija funkcije $f(x) = 1/x$, $x > 0$ na $\mathbb{N}$.

U srednjoj školi smo se igrali s nizovima realnih brojeva a_n, $n \in \mathbb{N}$, koji posjeduju precizna svojstva među njihovim susjednim elementima. Dva takva tipa niza su:

- **aritmetički niz** sa svojstvom da "svaki član niza je **aritmetička sredina** dva njegova susjeda" odnosno $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, što je ekvivalentno s " razlika svaka dva susjedna člana je konstantna" tj. $a_{n+1} - a_n = d, \forall n \in \mathbb{N}$;
- **geometrijski niz** sa svojstvom da "svaki član niza je **geometrijska sredina** dva njegova susjeda" odnosno $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, što je ekvivalentno s " omjer svaka dva susjedna člana je konstantan" tj. $a_{n+1} : a_n = q, \forall n \in \mathbb{N}$.

Na primjer:

- $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ je najpopularniji aritmetički niz;
- $a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ je najpopularniji geometrijski;
- $a_n = c \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$ je istovremeno i aritmetički i geometrijski niz jer je $a_{n+1} - a_n = c - c = 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $a_{n+1} : a_n = c/c = 1, n \in \mathbb{N}$.

Sada na faksu nas ne interesiraraju ovakvi specijalni tipovi niza, nego potpuno nešto drugo: za dani niz a_n **odrediti da li postoji, te ako postoji, koji je to realan broj L kome se približavaju (gomilaju ili konvergiraju) članovi niza a_n ($a_n \approx L$) s velikim indeksom $n \in \mathbb{N}$ ($n \approx \infty$)?**. Ako takav broj postoji onda razlikujemo dvije bitno različite situacije: L je **gomilište** i L je **limes** niza a_n .

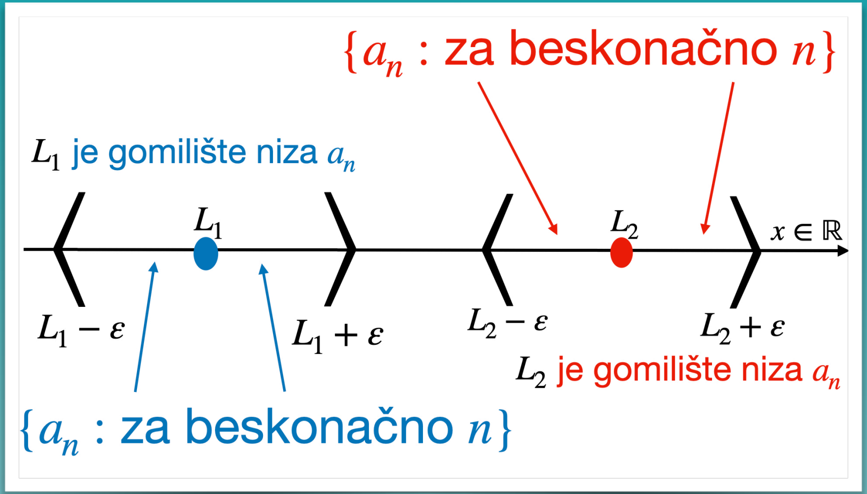
Definicija limesa i gomilišta niza a_n

- L **je gomilište niza** a_n što znači da $a_n \approx L$ za **beskonačno mnogo** $n \in \mathbb{N}$ ili strogo definirano: $\forall \varepsilon > 0$, $|a_n - L| < \varepsilon$ za **beskonačno mnogo** $n \in \mathbb{N}$;
- L **je limes niza** a_n što znači da $a_n \approx L$ za **skoro sve** $n \in \mathbb{N}$ odnosno **za sve** $n \geq n_0$ i **za neki** $n_0 \in \mathbb{N}$ ili strogo definirano: **za svaki** $\varepsilon > 0$ je $|a_n - L| < \varepsilon$ **za sve** $n \geq n_0$ i **za neki** $n_0 \in \mathbb{N}$. Oznaka: $L = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Trač–spika o definiciji: 🗣️💬👁️

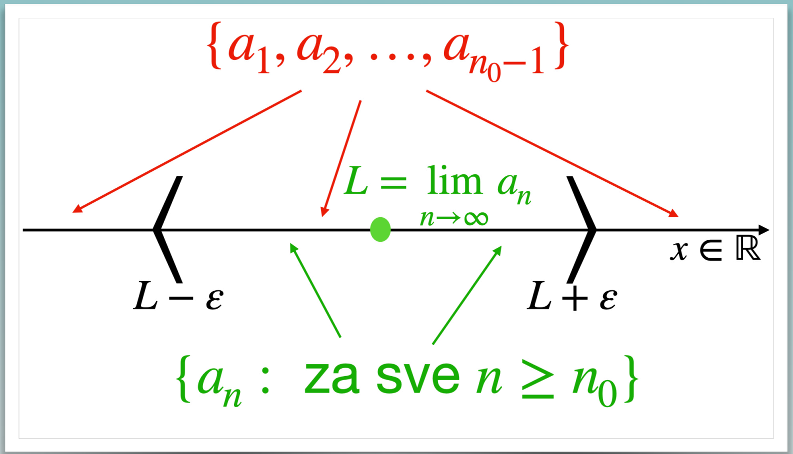
• neki članovi niza (njih beskonačno mnogo) se **gomilaju** oko gomilišta L ako ono postoji; na primjer, parni članovi niza $a_n = (-1)^n$ se gomilaju oko gomilišta $L_2 = 1$, dok neparni članovi se gomilaju oko okomilišta $L_1 = -1$;

• skoro svi članovi niza **teže** prema limesu niza, ako on postoji; na primjer svi članovi niza $a_n = (-1)^n / n$ teže prema limesu niza $L = 0$;



• limes niza ako postoji je specijalni slučaj gomilišta niza, dok obrat ne vrijedi, gomilište niza ne mora biti limes;

• **limes** niza ako postoji **je jedinstven** u niza svoga, dok **gomilišta** niza **može biti više**, čak beskonačno mnogo;



• oznaka $|a-b|$ označava **udaljenost** dva realna broja $a, b \in \mathbb{R}$, dok oznaka $|a-b| < \varepsilon$, gdje $\varepsilon > 0$ označava da a i b mogu biti **proizvoljno jako blizu**; prema tome u gornjoj definiciji oznaku $|a_n - L| < \varepsilon$ tumačimo da su članovi niza a_n "proizvoljno jako blizu broju" L ; isto tako možemo reći da je veoma mali broj $\varepsilon > 0$ **zanemarivo mala greška aproksimacije** članova niza s njiegovim limesom;

• pčele se gomilaju oko nekoliko gomilišta-košnica .

Budući da je:

$|a_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Longleftrightarrow a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$,

to prethodnu definiciju možemo ponovno napisati u terminima otvorenih intervala umjesto termina udaljenosti.

Definicija limesa i gomilišta niza a_n pomoću intervala:

• $L \in \mathbb{R}$ **je gomilište niza** a_n što znači da $a_n \approx L$ za **beskonačno mnogo** $n \in \mathbb{N}$ ili strogo definirano pomoću intervala: $\forall \varepsilon > 0$, $a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. U ovakvom slučaju kažemo da postoji podniz $a_{p(n)}$ od niza a_n tako da $a_{p(n)} \to L$ kad $n \to \infty$ odnosno **gomilište niza je ustvari limes nekog njegovog podniza**.

• $L \in \mathbb{R}$ **je limes niza** a_n što znači da $a_n \approx L$ za **skoro sve** $n \in \mathbb{N}$odnosno **za sve** $n \geq n_0$ i **za neki** $n_0 \in \mathbb{N}$ ili strogo definirano pomoću intervala:

za svaki $\varepsilon > 0$ je $a_n \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle$ **za sve** $n \geq n_0$ i **za neki** $n_0 \in \mathbb{N}$, gdje n_0 **ovisi o** ε.

U ovakvom slučaju kažemo da je niz a_n **konvergentan** i da **konvergira prema** L , što se označava na dva načina:

$$a_n \to 0 \text{ kad } n \to \infty \quad \text{ili} \quad \text{još kraće} \lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Na primjer, činjenica da je niz $a_n = 1/n$ konvergentan te da ima limes $L = 0$ (očito se njegovi članovi s velikim indeksom $n \in \mathbb{N}$ približavaju nuli) se može kraće zapisati:

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ kad } n \to \infty \quad \text{ili} \quad \text{još kraće} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Teorem. Neka su a_n i b_n dva konvergentna niza. Tada vrijedi:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n \pm \beta\cdot b_n) = \alpha\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \beta\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$;

5) $a_n \le b_n$ za svaki $n \ge n_0$ i neki $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Stara mudrost o ovome teoremu kaže: "*Limes je kao bakterija, svakog trena je spreman podijeliti se na dva svoja konačna dijela unutar neke algebarske operacije.*"

4.1 Sa $[x]$ označavamo najveće cijelo od pozitivnog realnog broja x. Na primjer: $[3.1] = [3.9] = 3$. Primijetimo da je $[x] + 1 > x$.

A. *Za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[1/\varepsilon\right] + 1$ *takav da vrijedi:*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0 \text{ ili kraće zapisano: } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

B. *Za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\sqrt{1/\varepsilon}\right] + 1$ *takav da vrijedi:*

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0 \text{ ili kraće zapisano: } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.$$

[**RB. –> VIDEO**]

C. *Za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 = n_0(\varepsilon) = [\ln(1/\varepsilon)] + 1$ *takav da vrijedi:*

$$\left|\left(\frac{1}{e}\right)^n - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0 \quad \text{odnosno: } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0.$$

D. *Neka je potencija* $p > 0$. *Tada* $\dfrac{1}{n^p} \to 0$ *kad* $n \to \infty$.

[**RD. –> VIDEO**]

E. *Neka je baza* $q \in [0,1\rangle$. *Tada* $q^n \to 0$ *kad* $n \to \infty$.

[**RE. –> VIDEO**]

Posljedice Zadatka 4.1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n}}=0\,.\,\square$$

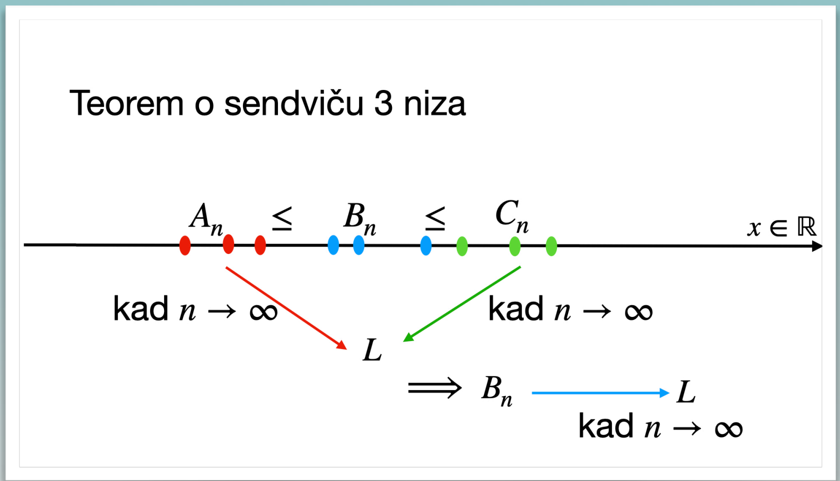
Baza za mnoge teorijske rezultate i tehnike računanja limesa je sljedeći teorem.

Jedna od posljedica Teorema s prethodne strranice je: "Teorem o sendviču 3 niza".

4.2 *Neka su A_n i C_n dva konvergentna niza takvi da je* $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = L$.

Neka je B_n treći niz koji zadovoljava: $A_n \le B_n \le C_n$ za svaki $n \ge n_0$ i neki $n_0 \in \mathbb{N}$. Tada je i B_n konvergentan i $\lim_{n\to\infty} B_n = L$.

[**R. –>** VIDEO]



Posljedica Zadatka 4.2.

- U **Zadatku 4.1.A** smo dokazali da je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Ako označimo sa $A_n=0$, $B_n=\frac{1}{n^p}$ i $C_n=\frac{1}{n}$, tada se lako pokaže: ako je $p\ge 1$ tada je $A_n \le B_n \le C_n$ za svaki $n \ge 1$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 0,$$

to po teoremu o sendviču 3 niza slijedi: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0\,.$ ✅

- Specijalno za $A_n=0$, $B_n=\frac{1}{(n+1)^p}$, $C_n=\frac{1}{n^p}$, $A_n \le B_n \le C_n$ za svaki $n\ge 1$ i

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 0,$$

po teoremu o sendviču 3 niza slijedi: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^p}=0\,.$ ✅

Osim što se dobro kombinira s prethodnim zadatkom sljedeći zadatak je važan za nizove oko $x=0$ koji nisu nužno pozitivni.

4.3 *Vrijedi: $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz ide direktno iz definicije limesa i ove jednostavne činjenice za apsolutnu vrijednost:

$$|a_n-0|=|a_n|=||a_n||=||a_n|-0|.\quad \text{Q.E.D.} ✓$$

Primijetimo da tvrdnja **zadatka 4.3** **općenito ne vrijedi za limese različite od nule**. Na primjer, ako je $a_n = (-1)^n$ tada niz a_n nije konvergentan dok $|a_n| = 1 \to 1$, pa prema tome ne vrijedi $a_n \to L \iff |a_n| \to |L|$ kad $n \to \infty$.

Posljedica Zadatka 4.2 i 4.3. Neka je niz $a_n = (\sin n)/n$. Budući da sinus funkcija mijenja predznak, ovaj niz isto tako mijenja predzak (znači niz nije nužno s pozitivnim članovima). Tvrdimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Po **zadatku 4.3** dovoljno je pokazati da za ovaj niz vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. No, budući da je $|\sin n| \le 1$ to vrijedi:

$$0 \le |a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Sada po tvrdnji **zadatka 4.2** i činjenici da $1/n \to 0$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ što smo i htjeli pokazati. Prema tome:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Primijetimo da smo ovaj limes mogli dobiti iz bez **zadatka 4.3** tako da smo $|\sin n| \le 1$ napisali u obliku $-1 \le \sin n \le 1$. Tada bi imali da je:

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}, \ \forall n \ge 1,$$

pa primjenom **zadatka 4.2** ponovno slijedi traženi limes. 😇

Ovo se lako može generalizirati u sljedeća dva zadatka.

4.4 *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bilo kakva funkcija te neka je* $p > 0$. *Tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(f(n))}{n^p} = 0.$

4.5 [**ZIR 15.2.2021.-2c)**] *Izračunati limes:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(3n^2)}{n}.$$ [**R:** $L = 0$ **–>** **VIDEO**▶]

Direktno iz definicije gomilišta i limesa možemo lako izvesti sljedeće odnose između pojmova "limes" i "gomilište" niza.

4.6 [**DIR 14.9.2021.4a)**] *Ako je niz konvergentan, tada on ima jedinstveno gomilište.* [**R: –>** **VIDEO**▶]

Posljedice Zadatka 4.6.

(i) Limes L konvergentnog niza je istovremeno i njegovo jedinstveno gomilište; na primjer niz: $a_n = (-1)^n/n \to 0$ kad $n \to \infty$ pa je $L = 0$ i njegovo jedinstveno gomilište; jednostavniji zapis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(ii) Obratom po kontrapoziciji $(A \implies B) \equiv (\neg B \implies \neg A)$, gdje je:

A = "niz je konvergentan" i B = "ima jedinstveno gomilište" dobivamo još jednu istinitu tvrdnju $\neg B \implies \neg A$ odnosno: **ako niz a_n ima barem dva gomilišta, tada on nema limes odnosno nije konvergentan**. Na primjer, niz $a_n = (-1)^n$ ima dva gomilišta $L_1 = -1$ i $L_1 = 1$, jer imamo dva njegova podniza koji konvergiraju različitim vrijednostima: $a_{2n} \to 1$ i $a_{2n+1} \to -1$kad $n \to \infty$, pa zbog toga ovaj niz nema limes.

4.7 *Postoji niz realnih brojeva a_n koji nema limes ali ima samo jedno gomilište! Je li to moguće?*
[**R. –>** VIDEO ▶️]

Posljedica Zadatka 4.7: limes je gomilište, ali obrat ne vrijedi odnosno gomilište niza ne mora biti njegov limes.

Definicija. *Niz realnih brojeva a_n je omeđen ako postoji realan broj $M > 0$ takav da vrijedi: $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (ili za sve $n \geq n_0$ i neki $n_0 \in \mathbb{N}$).*

Na prethodnoj stranici smo pokazali da niz $a_n = (-1)^n$ ima dva gomilišta pa zbog toga nema limes. Međutim, on je omeđen jer: $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1 =: M$.

No, postoji niz koji ima jedno gomilište ali nije omeđen, kao na primjer: $a_n = 2^n\left(1 + (-1)^n\right), n \in \mathbb{N}$.

Zaista, podniz $a_{2n} = 2^{2n}(1 + (-1)^{2n}) = 2 \cdot 4^n \to \infty$ kad $n \to \infty$, iz čega slijedi da niz a_n nije omeđen (kad bi a_n bio omeđen onda bi bio omeđen i svaki njegov podniz, a mi smo lagano pokazali da podniz a_{2n} nije omeđen. :)))) S druge strane, njegov podniz

$a_{2n+1} = 2^{2n+1}(1 + (-1)^{2n+1}) = 0 \to 0$ kad $n \to \infty$,

pa prema tome niz a_n ima jedno gomilište $L = 0$, koje nije limes niza.

Iz prethodna dva primjera zaključujemo: **niz koji ima gomilište može i ne mora biti omeđen**. No, ovo ne vrijedi i za limese niza, kao što govori sljedeći zadatak.

4.8 [LJIR 13.7.2021.-a)T3] *Ako je niz konvergentan, tada je on i omeđen.* [**R: –>** VIDEO ▶️]

Primijetimo da: *“Obrat ne vrijedi jer postoji omeđen niz koji nije konvergentan”. “Isto tako, postoji niz koji ima samo jedno gomilište, ali nije omeđen.”*

Posljedica Zadatka 4.8. Ako tvrdnju **zadatka 4.8** zapišemo u obliku $A \implies B$, gdje je A = "niz je konvergentan" i B = "niz je omeđen" , tada primjenom obrata po kontrapoziciji: $(A \implies B) \equiv (\neg B \implies \neg A)$, dobivamo ekvivalentnu tvrdnju $\neg B \implies \neg A$ odnosno:

ako niz nije omeđen, tada on nije konvergentan.

Sljedeći nizovi **nisu konvergentni jer nisu omeđeni**: $a_n = 2^n$, $a_n = q^n$ za $q > 1$, $a_n = n^3$ i $a_n = n^p$ za $p > 0$.

4.2 RAČUNANJE LIMESA NIZA ZADANOG OPĆIM ČLANOM

Ideja rješavanja neodređenog oblika se temelji na činjenici da se limes od bilo koje algebarske operacije dva niza rastavlja na algebarsku operaciju dva limesa ta dva niza, pod uvjetom da su ta dva limesa konačna, kao što je to rekao jedan od teorema iz prethodne točke - **122. stranica** (narodski rečeno: “limes je kao bakterija, rastavlja se po bilo kojoj algebarskoj operaciji na dva limesa pod uvjetom da oni postoje”).

Zahvaljujući ovom rezultatu mi znamo raditi s konačnim graničnim veličinama, pa ćemo neodređene oblike rješavati tako što ćemo **beskonačno velike veličine algebarskim trikovima svesti na konačne**. Pri tome razlikujemo tri osnovna neodređena oblika:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty \ \text{i}\ 1^{\infty}.$$

4.2.1 Neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$

4.9 Računamo sljedeći limes niza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n^2 + 7}{5n^3 + 4n - 1} = \frac{\infty}{\infty} =$$

[u brojniku i nazivniku imamo beskonačne veličine pa rezultat ovog limesa može biti “bilo što” ili stručno rečeno rezultat je **neodređeni oblik**; siguran način razrješenja ovog neodređenog oblika je izvršiti **prelaz u brojniku i nazivniku na konačne veličine**; to se relaizira tako što ćemo brojnik i nazivnik podijeliti s najvećom veličinom, a kako su sve potencije onda s največom potencijom; ovdje je to n^3; na taj način dobicamo razlomak koji u brojniku i nazivniku ima konačne veličine pa onda možemo primijeniti **zadatak 4.1.B** i glavni teorem ispod njega]:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^3 - 4n^2 + 7)/n^3}{(5n^3 + 4n - 1)/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3}}{5 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}} =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \right] = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} =$$

$$= [\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n \pm \beta\cdot b_n) = \alpha\cdot\lim_{n\to\infty}a_n \pm \beta\cdot\lim_{n\to\infty}b_n] =$$

$$= \frac{2-4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{5+4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = [\text{zadatak 5.1.B}] = \frac{2}{5}.$$

Ovo je postupak s detaljnim objašnjenjima, tako da se točno vidi što se u kojem koraku koristi. Međutim, u praksi ovaj zadatak se kraće i brže riješava ovako:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n^2+7}{5n^3+4n-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3-4n^2+7)/n^3}{(5n^3+4n-1)/n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^3}}{5+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{5}. ✅$$

4.10 Izračunati limes $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5n^4+3n^3+7n-1}}{3n+\sqrt[3]{4n^3+2n^2+6n+5}}$.

[**R.** $L = \frac{\sqrt[4]{5}}{3+\sqrt[3]{4}}$ **–>** **VIDEO**▶️]

4.11 [**ZIR 17.02.2020.-4.b)**] Postoji li limes niza:

$a_n = (-1)^n\frac{3n^2+4n+1}{2n^2+n-5}$? [**R:** **–>** **VIDEO**▶️]

4.12 Neka je $p\in\mathbb{R}$ i $a_n = \frac{n^p-2n}{5n^2+3n+1}$.

Odrediti parametar p tako da vrijedi:

(i) **postoji** $L = \lim_{n\to\infty}a_n$ i $L=0$;

(ii) **postoji** $L = \lim_{n\to\infty}a_n$ i $L>0$; u ovom slučaju izračunati L;

(iii) **ne postoji** $\lim_{n\to\infty}a_n$, jer je a_n neomeđen.

[**R.** (i) $p<2$; (ii) $p=2, L=\frac{1}{5}$; (iii) $p>2$; Detalji**–>** **VIDEO**▶️]

U svakom trenu potrebno je napamet znati sljedeće **esencijalne limese** (neke od njih smo već pokazali u **zadatku 4.1** a neke ćemo pokazati u ovom dijelu gradiva ali nešto kasnije, kada budemo ovladali svim tehnikama računanja limesa:

NEKI ESENCIJALNI LIMESI:

- ako je $p>0$, tada je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$;
- ako je $q\in\langle -1,1\rangle$, tada je $\lim_{n\to\infty}q^n=0$;
- ako je $p>0$ i $a>1$, tada je $\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$.

Posljedice:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{4^n}=0\,.\ \square$$

4.13 Računamo sljedeći limes niza:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2^n-5\cdot 3^n}{7n^2-2^n+4\cdot 3^n}=\frac{\infty}{\infty}=$$

[u brojniku i nazivniku imamo beskonačne veličine; prelaz na konačne veličine ostvarujemo dijeljenjem brojnika i nazivnika s najvećom veličinom, a to je 3^n, pa zahvaljujući esencijalnim limesima gore, dobivamo]:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+2^n-5\cdot 3^n)/3^n}{(7n^2-2^n+4\cdot 3^n)/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}-5}{7\cdot\frac{n^2}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}+4}=-\frac{5}{4}.$$

4.14 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3^n-n}+5\cdot 2^{2n}}{(n+2^n)^2+3\cdot 4^{n+1}}=\frac{\infty}{\infty}=?$$

[**R.** $L=\dfrac{5}{13}$ **–>** **VIDEO**▶]

4.2.2 Neodređeni oblik $\infty-\infty$

4.15 Računamo sljedeći limes niza:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-n+1}\right)=\infty-\infty=$$

[sa obadvije strane minusa "–" imamo beskonačne veličine pa rezultat ovog limesa može biti "bilo što" ili stručno rečeno rezultat je **neodređeni oblik**; siguran način razrješenja ovog oblika je racionalizacija, da bi pod korjenom oslobodili najveću potenciju; na primjer $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ racionaliziramo tako što ga pomnožimo sa razlomkom

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ i tada dobivamo:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$]:

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-n+1}\right)\frac{2n+\sqrt{4n^2-n+1}}{2n+\sqrt{4n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-(4n^2-n+1)}{2n+\sqrt{4n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+\sqrt{4n^2-n+1}}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)/n}{\left(2n + \sqrt{4n^2 - n + 1}\right)/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$ ✅

Prema tome, neodređeni oblik $\infty - \infty$ smo trikom koji se zove racionalizacija sveli na neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, a ovaj pak riješavali kao u prethodnoj točki.

PRAVILA RACIONALIZIRANJA:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$ ✔

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}};$$

$$(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) \cdot \frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}.$$

Kao što vidimo, bit racionaliziranja je **u brojniku umjesto razlike korijena** (drugog, trećeg ili četvrtog) **dobiti razliku bez korijena:** $a - b$.

4.16 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 7n^3 - 6} - \sqrt{n^4 - n^3 + 5n^2}}{2n + 11} = \frac{\infty - \infty}{\infty} = ?$$

[**R.** $L = 2$ detalji na **–>** **VIDEO**▶️]

4.17 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^6 + n^5} - \sqrt{n^3}} = \frac{\infty}{\infty - \infty} = ?$$

[**R.** $L = 4$ detalji na **–>** **VIDEO**▶️]

4.18 Ako je $a \in \mathbb{R}$ izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + a \cdot n^2} - n\right) = \infty - \infty = ?\,.$$

[**R.** $L = a/3$; koristiti pravilo racionaliziranja razlike trećih korijena: $\sqrt[3]{n^3 + a \cdot n^2} - \sqrt[3]{n^3}$]🖐

4.2.3 Neodređeni oblik 1^∞

U prethodna dvije točke smo upoznale neke "algebarske trikove" pomoću kojih smo se riješili prethodna dva neodređena oblika i to redom:

$\frac{\infty}{\infty}$ "dijeljenje s najvećom potencijom brojnika i nazivnika"

$\infty - \infty$ "racionaliziranjem prelazimo na $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Kod neodređenog oblika 1^∞ koristimo sljedeća pravila:

postoje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\lim_{n\to\infty} b_n}$;

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

U prethodnoj jednakosti, prvi limes po $n \in \mathbb{N}$ je **definicija broja** e, a ostala dva nam govore da limes ostaje isti ako $n \in \mathbb{N}$ zamijenimo mnogo složenijim izrazom $x \in \mathbb{R}$ tako da $x \to \pm\infty$. Isto tako u prvom pravilu niz b_n može biti konstantni niz, na primjer $b_n = c$ iz čega specijalno slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$. Na primjer,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{5n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^5 = \lim_{n\to\infty}\left((a_n)^{b_n=5}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\lim_{n\to\infty} 5} = e^5.$$

4.19 Računamo sljedeći limes :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^{4n} = 1^\infty = \text{"u bazi nam treba izraz } 1+\frac{1}{x}\text{" } =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+2n}{n^2+1}-1\right)^{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n^2+1}\right)^{4n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n-1}}\right)^{4n} = \text{"tu je } 1+\frac{1}{x} \text{ za } x = \frac{n^2+1}{2n-1} \to \infty\text{"} =$$

$= [$ sada trebamo $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pa gore u eksponentu pored $4n$ dodamo $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{n^2+1}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{n^2+1}$ $] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n-1}}\right)\right)^{\frac{n^2+1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{n^2+1}\cdot 4n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{4n(2n-1)}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n(2n-1)}{n^2+1}} = e^8 \,.$$ 👍🧠

4.20 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n-1}} = 1^\infty = ?$$

[**R.** $L = e^{-1}$ **–>** **VIDEO** ▶️] .

4.21 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{2^{2n+2}-5n^2}\right)^{4^n} = 1^\infty = ?$$

[**R:** $L = e^\infty = \infty$ **;** koristiti da je $2^{2n+2} = 4^{n+1}$ te tri koraka kao u prethodnom zadatku] .

4.22 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(3n)^n}{(3n+1)^{n+2}}\right) = \frac{\infty}{\infty}\cdot 1^\infty = ?$$

[**R:** $L = \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; koristiti da je:

$(2n+2)! = (2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!$

$(3n+1)^{n+2} = (3n+1)^2\cdot(3n+1)^n$] samo hrabro! ✌️

4.23 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{2n-1}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n+2} = \infty\cdot 0 = ?$$

[**R:** $L = \frac{e}{8}$; koristiti da je: $2^{2n-1} = \frac{2^{2n+2}}{8}$ i

$$\frac{2^{2n+2}}{8}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n+2} = \frac{1}{8}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{2n+2} = 1^\infty .$$ 😇

Ako ni sada ne ide, pogledaj uskoro 5. dio gradiva, gdje će analogan limes ali po x biti video riješen:

$$\lim_{x\to\infty} 2^{2x-1}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{2x+2} = \infty\cdot 0 = \frac{e}{8} .$$

Ako ste se malo umorili od računanja limesa, tada poslušajte autorsku pjesmu:

SUMU I LIMES NIZA VOLI ANALIZA 🎶

4.3 OMEĐENOST, MONOTONOST I KONVERGENCIJA

Na **125. stranici** smo definirali i radili s omeđenim nizovima i povezali konvergenciju i omeđenost u smislu da konvergencija povlači omeđenost te da obrat ne vrijedi. No sada ćemo pokazati da ako **omeđenom nizu se doda monotonost tada možemo dobiti njegovu konvergenciju**. Prije toga, definiramo omeđenost niza odozdo i odozgo, što nužno ne povlači da je niz omeđen:

Definicija. *Niz realnih brojeva a_n je odozgo (odozdo) omeđen ako postoji realan broj M takav da vrijedi: $a_n \leq M$ $(M \leq a_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ ili za sve $n \geq n_0$ i neki $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Ako smo rekli da se niz a_n može tretirati i kao funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = a(n)$, onda je monotonost niza specijalni slučaj monotonosti funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koju smo definirali i vježbali u **4. dijelu gradiva**, podsjetimo se: ako za svaki $x_1 < x_2$ je $f(x_1) \leq f(x_2)$ (odnosno $f(x_1) \geq f(x_2)$), tada je $f(x)$ **rastuća** (odnosno **padajuća**). Štoviše, budući da je skup $\mathbb{N}$ domena od niza a_n onda je dovoljno za x_1 i x_2 dva susjedna prirodna broja n i $n+1$. Zbog toga imamo okakvu definiciju:

Definicija. Niz a_n je **monoton** ako je **rastući** ili **padajući**. Niz a_n je **rastući** (odnosno **padajući**) ako vrijedi:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ (odnosno } a_n \geq a_{n+1}\text{) za sve } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{ili } a_n \leq a_{n+1} \text{ (odnosno } a_n \geq a_{n+1}\text{) za sve } n \geq n_0 \text{ i neki}$$

Primijetimo da se tvrdnja $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (za sve $n \geq n_0$) ili tvrdnja $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (za sve $n \geq n_0$) može u dokazu zamijeniti sa sljedećim ekvivalentnim tvrdnjama, pod uvjetom da je $a_n \neq 0$, jer vrijedi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 \iff a_n \leq a_{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \iff a_n \geq a_{n+1}.$$

Sljedeći nizovi su padajući i odozdo omeđeni s nulom:

$$a_n = \frac{1}{n^3} \geq 0,\ a_n = \frac{1}{4^n} \geq 0,\ a_n = \sin\frac{1}{n} \geq 0\,.$$

Sljedeći nizovi su rastući i odozgo omeđeni s jedinicom:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1,\ a_n = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1,\ a_n = \frac{n}{n+1} \leq 1\,.$$

Međutim, postoji nizovi koji nisu niti rastući niti padajući poput niza $a_n = \sin n$. Sada možemo povezati omeđenosti i monotonost niza da bi dobili njegovu konvergenciju.

Teorem. Weierstrass je dokazao:
(i) a_n **raste i odozgo je omeđen** $\Longrightarrow a_n$ **je konvergentan**;
(ii) a_n **pada i odozdo je omeđen** $\Longrightarrow a_n$ **je konvergentan**.

Kao što vidimo, Weierstrass je dao dva kriterija za konvergenciju niza a_n. Međutim, ovaj teorem ništa ne govori o tome kako računski pronaći limes od a_n . Zbog toga se ovaj teorem dobro slaže s nekim drugim računskim tehnikama za limes niza, kao na primjer kod rekurzivno zadanog niza, sljedeća točka.

4.4 RAČUNANJE LIMESA REKURZIVNO ZADANOG NIZA

Niz osim općim članom, poput $a_n = 1/n^p$ ili $a_n = q^n$ može biti zadan i implicitno odnosno svojom rekurzijom. Kako za takve nizove pronaći limes? Pokazat ćemo 3 koračnu metodu, koja se oslanja na prethodni Weierstrassov teorem.

Isto tako, postoje nizovi koji su eskplicitno zadani pomoću svog općeg člana, ali ne možemo im pronaći limes tek tako, pa je zgodno za takav niz **prvo pronaći njegovu rekurziju a potom 3 koračnim postupkom za rekurzivne nizove pronaći njegov limesa**. Na primjer, niz

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \text{ ima rekurziju } a_1 = 2 \text{ i } a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n, n \geq 1,$$

pa ćemo 3 koračnim postupkom računati limes ovako rekurzivno zadanog niza i dobiti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

I ovo je jedini lagan način za računanje limesa ovog niza. Isto tako vrijedi i za niz

$$a_n = \frac{n}{2^n} \text{ ima rekurziju } a_1 = 1/2 \text{ i } a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n, n \geq 1,$$

pa ćemo 3 koračnim postupkom računati limes ovako rekurzivno zadanog niza i dobiti: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.24 *Izračunati limes niza a_n koji je zadan rekurzivnom relacijom*:

$$a_1 = 2 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}, n \geq 1 .$$

Pronalazimo limes u 3 radna koraka, te jednim preliminarnim "nultim" korakom.

0) U nultom koraku, treba napisati nekoliko članova niza da bi "naslutili" njegove granice i karakter monotonosti, što koristimo u sljedeća 3 koraka:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2},\quad a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5} \text{ i tako dalje.}$$

Pa induktivno možemo zaključiti sljedeće hipoteze koje dokazujemo matematičkom indukcijom.

1) Omeđenost odozdo s 0: $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

- baza indukcije: $a_1 = 2 \geq 0$; ✅
- korak indukcije: ako pretpostavimo je $a_n \geq 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$, tada treba dokazati da je $a_{n+1} \geq 0$; no očito je

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} = \frac{+}{+} \geq 0. \text{ ✅}$$

2) Monotono pada: $a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;

JAKO VAŽNO! Neće se moći dokazati monotonost ako imamo u rekurziji član a_n na više od jednog mjesta. A ovdje ga imamo i u brojniku i u nazivniku. Zato je potrebno rekurziju napisati što je jednostavnije moguće:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} = 1 - \frac{2}{2+a_n};$$

- baza indukcije: $a_1 = 2 \geq \frac{1}{2} = a_2$; ✅
- korak indukcije: ako je $a_n \geq a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, tada je $a_{n+1} \geq a_{n+2}$; radimo s pretpostavkom tako da joj s obe strane dodamo $+2$, zatim recipročno,, pa onda pomnožio s -2 i dodamo $+1$, što nas dovodi do rekurzije i na lijevoj i na desnoj strani nejednakosti; evo kako to ide:

$$a_n \geq a_{n+1} \Big| (+2) \implies 2 + a_n \geq 2 + a_{n+1} \Big| \frac{1}{\cdot} \implies$$

$$\implies \frac{1}{2+a_n} \leq \frac{1}{2+a_{n+1}} \Big| \cdot (-2) \implies$$

$$\implies \frac{-2}{2+a_n} \geq \frac{-2}{2+a_{n+1}} \Big| (+1) \implies$$

$$\implies 1 - \frac{2}{2+a_n} \geq 1 - \frac{2}{2+a_{n+1}} \Big| (+1) \implies a_{n+1} \geq a_{n+2}. \text{ ✅}$$

3) Računanje limesa: po Teoremu iz 5.3, iz prethodna dva koraka 1) i 2) slijedi da postoji limes $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, pa onda možemo "limesirati" njegovu rekurziju:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} \Big| \lim_{n\to\infty} \implies L = \frac{L}{2+L} \implies L^2 + 2L = L;$$

iz ove kvadratne jednadžbe slijedi $L=0$ i $L=-1$; zadnji odbacujemo jer je ovo pozitivan niz pa ostaje na kraju rješenje: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ✅✅

Prethodni **Zadatak 4.24** se može generalizirati:

4.25 *Neka su $c_0, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $c_0 \geq 1$ i $c > 0$. Pokazati da je rekurzivno zadani niz a_n:*

$$a_1 = c_0 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = \frac{c}{2+c}, n \geq 1,$$

je padajući i odozdo omeđen: $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom pokazati da $a_n \to 0$ kada $n \to \infty$.

4.26 *Izračunati limes rekurzivno zadanog niza a_n:*

$$a_1 = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, n \geq 1.$$

[**R.** $0 \leq a_n \leq 3$ i $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $L=3$ **–>** **VIDEO** ▶️
II. način je preko općeg člana vidi **Zadatak 4.39**]

4.27 *Za niz $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ izvedimo njegovu rekurziju.*

Ako u opći član niza direktno uvrstimo indeks $n+1$ umjesto n tada dobivamo:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{(n+1)} a_n \quad \text{i} \quad a_1 = 2.$$

Btw.: sada možemo ako želimo pomoću ove rekurzije ponoviti 3 koraka iz **zadatka 4.24** i izračunati limes ovog niza. Za detalje pogledati općenitiji niz u **zadatku 4.28**.

4.28 [**MI 22.11.2021.-4) spec. za $q=5$**] *Neka je realan broj $q>0$. Pomoću rekurzije za niz $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ dokazati da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.* [**R: –>** **VIDEO** ▶️]

4.29 [**Ponovljeni MI 13.12.2021.-4.c) spec. za $p=1, q=5$**] *Neka je potencija $p>0$ i baza $q>1$. Pomoću rekurzije za niz $a_n = \dfrac{n^p}{q^n}$ dokazati da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

[**R:** jako slično prethodnom zadatku👍]

4.30 [**MI 26.11.2019.-4.b)**] *Niz a_n je rekurzivno zadan:*

$$a_1 = 8 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\right)^3, n \geq 1.$$

Je li niz a_n konvergentan? Obrazložiti tvrdnju. Ako jest, pronaći mu limes. [**R: –>** **VIDEO** ▶️]

4.5 ESENCIJALNI LIMESI - ALMANAH

Ponovimo još jednom sve bitne limese koje smo koristili u prethodnim tehnikama za računanje limesa.

- Ako je $p > 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Posljedice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} = 0\,.$$

- Ako je $q \in \langle -1,1\rangle$, tada je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Posljedice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n^2}} = 0.$$

- Ako je $p > 0$ i $a > 1$, tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0\,.$

Posljedice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{4^n} = 0.$$

- Ako je $q > 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$

Posljedice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n)!} = 0.$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

4.6 STUDENTSKI I PRO-FINI ZADACI

Na kraju ovog petog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak iz ovog dijela gradiva zajedno s rješenjem i postupkom neka ga **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti dodatne zanimljivije zadatke😎 , koji su "pro-fini".

4.31 [**ZIR 7.02.2022.-4.b) specijalno za** $a = 2, b = 1, c = 2, d = 3$ **ili ZIR 17.02.2020.-4.c) spec. za** $a = 0, b = 3/2, c = 1, d = 0$ **ili ZIR 15.02.2021.-2.c) spec. za** $a = 1, b = 2, c = 2, d = 3$].

Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{cn+d} = 1^{\infty},$$

gdje su $a \neq b$ i $c \neq 0$. [**R:** $L = e^{(a-b)\cdot c}$ **–>** **VIDEO**]

4.32 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty} \left[4n\left(\ln(2n+3) - \ln(2n-1)\right)\right] = \infty \cdot (\infty - \infty).$$

[**R.** $L = 8$ **–>** **VIDEO**]

Mnogi misle da postoje samo tehnike za računanje limesa, a za gomilišta ne, nego se gomilišta kroz primjere iskazuju i po definiciji dokazuju. Ovo nije istina jer gomilište nije ništa drugo nego limes nekog podniza, pa se na taj podniz može primijeniti tehnika računanja limesa. Upravo tako treba postupiti u sljedeća dva zadatka.

4.33 [**MI 25.11.2020-4.b).c)**] b) Odrediti gomilišta niza

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\left(5 + \frac{1}{n}\right), & \text{za } n \text{ paran},\\ 2(-1)^n + \frac{1}{n^2}, & \text{za } n \text{ neparan}. \end{cases}$$

c) Je li niz $c_n = b_{2n-1}$ konvergentan?

[**R:** podniz b_{2n} ima dva gomilišta $L_1 = 5$ i $L_2 = -5$; podniz b_{2n-1} ima limes $L_3 = -2$, pa ukupni niz b_n ima 3 gomilišta; vidi komentar na **–>** **VIDEO**]

4.34 [**DIR 14.9.2021.4a)**] *Niz je zadan rekurzivno:*

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1 - a_n,\ n \geq 1.$$

Je li ovaj niz konvergentan? Obrazložiti tvrdnju.

[**R.** Nije jer ima dva gomilišta **–>** **VIDEO**]

4.35 *Pomoću rekurzije za niz* $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *dokazati da je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

[**R:** slično s **zadatkom 4.28**]

4.36 Izračunati limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left[2n\big(\ln(n+1)-\ln n\big)\right].$$

[**R:** $L=2$; slično s **zadatkom 4.32**]

Ponašanje i limes rekurzivno zadanog niza a_n može ovisiti o vrijednosti početnog člana a_1:

4.37 Niz a_n je zadan rekurzijom:

$$a_{n+1}=2a_n(1-a_n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ovisno o početnom članu a_1 pokazati da:

A) $a_1=1 \implies a_n=0,\ \forall n\geq 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$;

B) $a_1=\frac{1}{2} \implies a_n=\frac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$;

C) $a_1=\frac{1}{3} \implies a_n$ je rastući i odozgo omeđen i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$.

4.38 [Predložio i riješio student **Mauro Mohorovičić**] Dokazati sljedeće dvije tvrdnje. *Pretpostavimo da je niz b_n konvergentan i označimo s $L=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Definirajmo novi niz $a_n=(-1)^n b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.*

A. *Ako je $L=0$, tada je niz a_n konvergentan i $\lim a_n=0$.*

B. *Ako je $L\neq 0$, tada niz a_n ima dva gomilišta, dakle nije konvergentan.*

Dokaz. **A.** Iz **Zadatka 4.3** znamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ kad $n\to\infty$, pa je dovoljno pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 🖐

B. Imamo: $a_{2n}=b_{2n}\to L$ i $a_{2n-1}=-b_{2n-1}\to -L$ kad $n\to\infty$. ✌️☻

Sada prezentiramo 2. način rješavanja **Zadatka 4.26**.

4.39 [Predložio i riješio student **Andrija Petrušić**] *Izračunati limes niza a_n*:

$$a_1=\sqrt{3}\,,\quad a_2=\sqrt{3\sqrt{3}},\ldots\ldots,\ a_n=\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}\,,\ n\geq 1\,,$$

gdje u a_n imamo n kvadratnih korijena. Za ovaj niz je moguće induktivno izračunati opći član:

$$a_1=3^{1/2},\ a_2=3^{1/2}3^{1/4},\ldots,\ a_n=3^{1/2}3^{1/4}\cdots 3^{1/2^n}=3^{1/2+1/4+\cdots 1/2^n}.$$

Znamo sumu prvih n članova geometrijskog niza

$$1/2+1/4+\cdots 1/2^n=\frac{1}{2}\,\frac{1-1/2^n}{1-1/2}=1-\frac{1}{2^n}\to 1,\ n\to\infty.$$

Zbog toga je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 3^{1/2+1/4+\cdots 1/2^n}=3^{\lim_{n\to\infty}(1/2+1/4+\cdots 1/2^n)}=3^1=3.$$

4.40 Je li sljedeći niz

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & n < 10^3, \\ \dfrac{n^3}{n^3 - 4n + 1} & n \geq 10^3, \end{cases}$$

konvergentan? U slučaju da jest izračunati mu limes.

[R. Po definiciji znamo da na konvergenciju i limes nekog niza ne utječe ponašanje njegovih prvih $n_0 \in \mathbb{N}$ članova. Pa prema tome, činjenica da skoro prvih 1000 članova ovog niza oscilira između -1 i 1 ne utječe na njegovu konvergenciju i limes, pa samo promatramo članova za $n \geq n_0 = 10^3$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - 4n + 1} = \frac{\infty}{\infty} = 1,$$

odnosno dani niz a_n je konvergeentan i ima limes $L = 1$. **]**

4.41 Ispitajte konvergenciju niza a_n zadanog rekurzivno s:

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{a_n}}\right)^4, n \in \mathbb{N}.$$

[R. Usporedi ovaj zadatak s **zadatkom 4.30**. Kada raspišemo nekoliko članova ovog niza vidimo da je $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ odnosno imamo hipotezu da je a_n <u>padajući niz</u> (ovo treba još i dokazati mat. indukcijom). Prema Weierstrasu ovaj niz će biti konvergentan ako je još omeđen odozdo. Da bi mu precizno odredili donju granicu koja je jednaka njegovom limesu, preskočimo na trenutak korak omeđenosti (vratit ćemo se na ovo) i pređimo na izračunavanje njegovog limesa (niz je padajući i odozdo omeđen pa po Weierstrasu postoji $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ odnosno izvest ćemo postupak "limesiranja rekurzije":

$$a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{a_n}}\right)^4 \implies L = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{L}}\right)^4 \implies$$

$$(\sqrt[4]{L})^2 - 2\sqrt[4]{L} + 1 = 0 \implies L = 1.$$

Prema tome imamo još jednu pretpostavku: $1 \leq a_n \leq 4$, odnosno dovoljno je dokazati da je

$$1 \leq a_n \iff a_n \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz mat. indukcijom: za $n = 1$ vrijedi $a_1 = 4 \geq 1$ i pretpostavimo da je $a_n \geq 1$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Dokazat ćemo da ova pretpostavka povlači da je i $a_{n+1} \geq 1$ za ovaj $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \geq 1 \implies \sqrt[4]{a_n} \geq 1 \implies \frac{1}{\sqrt[4]{a_n}} \leq 1 \implies$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{a_n}} \geq -1 \implies 2-\frac{1}{\sqrt[4]{a_n}} \geq 2-1=1 \implies$$

$$\left(2-\frac{1}{\sqrt[4]{a_n}}\right)^4 \geq 1^4 = 1 \implies a_{n+1} \geq 1\,.$$

Slično se mat. indukcijom pokazuje prva hipoteza da je ovaj niz padajući odnosno $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prema ovome, dani niz je padajući i odozdo ograničen pa po Weierstrasu on je konvergentan, pa postoji $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pa postupkom "limesiranja rekurzije" koju smo prvo napravili dobivamo da $L = 1$ je konačno rješenje zadatka. **]**

Prethodni zadatak se može generalizirati i riješiti na potpuno isti način (uz neke izmjenjenje detalje):

4.42 Ako su zadani realan broj $A > 1$ i prirodan broj m pokazati da za niz a_n koji je određen rekurzijom :

$$a_1 = A,\ a_{n+1} = \left(2-\frac{1}{\sqrt[m]{a_n}}\right)^m,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

vrijedi: a_n je (strogo) padajući i omeđen odozdo s $L = 1$, te je konvergentan s limesom $L = 1$.

4.43 Ako je zadan konvergentan niz a_n takav da $a_n \to L$ kad $n \to \infty$, pokazati da je niz a_n^3 isto tako konvergentan i da vrijedi:

$$a_n^3 \to L^3 \ \text{ kad } n \to \infty.$$

[R. Koristimo dvije poznate činjenice:

1. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$;
2. ako je niz a_n konvergentan , tada je on omeđen odnosno postoji $M > 0$ takav da je $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
3. ako je $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tada za svaki (dovoljno mali) $\varepsilon_1 > 0$ postoji (uglavnom veliki) indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - L| < \varepsilon_1$.

Po definiciji konvergentnog niza potrebno je pokazati da za svaki dovoljno mali $\varepsilon > 0$ postoji uglavnom veliki indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n^3 - L^3|$ dovoljno malo odnosno da vrijedi: $|a_n^3 - L^3| < \varepsilon$. Zaista, koristeći 1. - 3. dobivamo:

$$|a_n^3 - L^3| = |a_n - L| \cdot |a_n^2 + a_n \cdot L + L^2| \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 (M^2 + M\cdot |L| + L^2) =: \varepsilon,$$

gdje koliko god su brojevi M i $|L|$ veliki možemo uzeti $\varepsilon_1 > 0$ tako mali da je i novo definirani $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali.
]

Nastavak slijedi kad se pojave neki novi dobri zadatci iz nizova :) Na sljedećoj stranici je sljedeće poglavlje!

PETI DIO

LIMES, ASIMPTOTE I NEPREKINUTOST REALNIH FUNKCIJA REALNE VARIJABLE:

U ovom dijelu gradiva se igramo s pet vrsta limesa funkcije:

$$\lim_{x\to\infty} f(x),\quad \lim_{x\to-\infty} f(x),\quad \lim_{x\to a} f(x),\quad \lim_{x\to a^-} f(x),\quad \lim_{x\to a^+} f(x)\,.$$

Ako postoji, limes funkcije je JEDINSTVEN broj $\in \mathbb{R}$.

Neka $x \to A$ obilježava točno jedan od 5 slučajeva: ili je $A = \infty$ ili $A = -\infty$ ili $A = a \in \mathbb{R}$ ili $A = a^-$ ili $A = a^+$. Ako postoje $\lim_{x\to A} f(x)$ i $\lim_{x\to A} g(x)$, tada uvijek vrijede SVOJSTVA LIMESA ⤵️:

1) $\lim_{x\to A}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \lim_{x\to A} f(x) + \beta \lim_{x\to A} g(x)$,

2) $\lim_{x\to A}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to A} f(x) \cdot \lim_{x\to A} g(x)$,

3) $\lim_{x\to A} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to A} f(x)}{\lim_{x\to A} g(x)}$,

4) $\lim_{x\to A}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to A} f(x)\right]^{\lim_{x\to A} g(x)}$.

5.1 Limes funkcije kad $x \to \pm\infty$

Ako napišemo jednu ispod druge definicije limesa niza a_n i limesa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kad $x \to \infty$ (pretpostavimo da postoji interval $[M, \infty\rangle \subseteq D(f)$ za neki $M \in \mathbb{R}$):

Definicije.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$;

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \geq M$;

tada vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x), \text{ gdje je } f(n) = a_n.$$

Zbog toga, sve što smo do sada naučili o neodređenim oblicima kod limesa niza vrijedi isto tako i za limes funkcije kad $x \to \infty$, što ćemo kratko ponoviti u **5.1.1**. Štoviše, vrijede i **neki esencijalni limesi** (osim onog koji sadrži faktorijel $n!$):

- ako je $p > 0$, tada je $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$;
- ako je $q \in \langle -1,1\rangle$, tada je $\lim_{x\to\infty} q^x = 0$;
- ako je $p > 0$ i $a > 1$, tada je $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$.

Što ako umjesto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ trebamo izračunati $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

Ako napišemo jednu ispod druge definicije limesa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kad $x \to -\infty$ (pretpostavimo da postoji interval $\langle -\infty, M] \subseteq D(f)$, $M \in \mathbb{R}$) i kad $x \to \infty$ (pretpostavimo da postoji interval $[M, \infty\rangle \subseteq D(f)$, $M \in \mathbb{R}$):

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \leq M$;

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \geq M$;

tada vidimo da možemo koristiti supstituciju $x \leftrightarrow -x$ kojom se limes funkcije oko $x = -\infty$ prebacuje na odgovarajući limes oko $x = \infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = |x \leftrightarrow -x| = \lim_{x\to\infty} f(-x).$$

5.1.1 Neodređeni oblici $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ i 1^∞

5.1 Računamo sljedeći limes funkcije oko $x = -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+4x^2-7}{5x^3+4x+1} = |x \leftrightarrow -t| =$$

$$= \lim_{-t\to-\infty} \frac{2(-t)^3+4(-t)^2-7}{5(-t)^3+4(-t)+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{-2t^3+4t^2-7}{-5t^3-4t+1} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2t^3-4t^2+7}{5t^3+4t-1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{5}$$ (vidi **zadatak 4.9**). ✓

Zašto je važna supstitucija $x \leftrightarrow -x$ će biti objašnjeno u **zadatku 5.3** dolje.

Sad znamo kako se limes funkcije oko $x = -\infty$ transformira na odgovarajući limes oko $x = \infty$, te znamo da je limes funkcije $x = \infty$ jednak limesu odgovarajućeg niza a_n:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = |x \leftrightarrow -x| = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ gdje je } a_n = f(n) ;$$

5.2 Računamo limes (hvala Ivane 👍):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[10]{-x^5+x^3-1}}{\sqrt[4]{x^2+x+5}} = |x \leftrightarrow -t| =$$

$$= \lim_{-t\to-\infty} \frac{\sqrt[10]{-(-t)^5+(-t)^3-1}}{\sqrt[4]{(-t)^2+(-t)+5}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[10]{t^5-t^3-1}}{\sqrt[4]{t^2-t+5}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[10]{t^5-t^3-1}}{\sqrt[4]{t^2-t+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[10]{x^5-x^3-1}\,/x^{1/2}}{\sqrt[4]{x^2-x+5}\,/x^{1/2}} =$$

$$= \left| x^{1/2} = x^{5/10} = x^{2/4} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[10]{x^5-x^3-1}\,/x^{5/10}}{\sqrt[4]{x^2-x+5}\,/x^{2/4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[10]{1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}}}{\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}} = 1.$$ ✅

Kod limesa funkcije oko $x = -\infty$, ako se odmah na početku zadatka ne primijeni super transformacija varijable $x \leftrightarrow -x$, velika je vjerojatnost pojavljivanja klasične greške "**zaboravljanja minusa**" kada se **negativna varijabla** x **podvlači pod korijen**. To ćemo objasniti na sljedećem ispitnom zadatku.

5.3 **DIR 14.9.2021.–5.a)** Izračunati:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+8x+2}}{2x+1}.$$

[**R:** $L = -1$ **->** **VIDEO**▶️]

Transformacija varijable $x \leftrightarrow -x$ je super korisna i kod neodređenog oblika $\infty - \infty$ o čemu govori sljedeći zadatak. Interesantno je da u ovom zadatku je malo tko primijetio da je ovo oblik $\infty - \infty$ jer su automatski uvrstili $x = \infty$ umjesto $x = -\infty$ ⚡🌩️🌧️ Nema potrebe za ovakvim uvrštavanjem prije nego što upotrijebimo $x \leftrightarrow -x$ 🌟

5.4 Računamo limes:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x-1}\right) = |x \leftrightarrow -t| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-t+\sqrt{t^2-4t-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-x\right) =$$

$$= \infty - \infty = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-1-x^2}{\sqrt{x^2-4x-1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x-1}{\sqrt{x^2-4x-1}+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(-4x-1)/x}{\left(\sqrt{x^2-4x-1}+x\right)/x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4-1/x}{\sqrt{1-4/x-1/x^2}+1} = \frac{-4}{1+1} = -2\,.$$ 🌝

5.5 Izračunati:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)(3x+2)} = \frac{\infty}{(\infty-\infty)\cdot\infty}.$$

[**R:** $L = -\dfrac{8}{15}$ **->** **VIDEO**▶️]

5.6 [**MI 25.11. 2020.-5.a)**] Računamo limes:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\ln(5x^2+x)-\ln(2x^2+1)\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{5x^2+x}{2x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right] = \left(\ln\frac{\infty}{\infty}\right)(\infty-\infty) =$$

$$= \left(\ln\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{2x^2+1}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) =$$

$$= \left(\ln\frac{5}{2}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$ ✔

Složeniji zadatak od prethodnog je sljedeći budući da u njemu imamo

$$\ln(x^2+2x)-\ln(x^2+1)=\ln\frac{x^2+2x}{x^2+1}\to\ln 1=0 \text{ kad } x\to\infty$$

što čini neodređeni oblik za razliku od prethodnog zadatka gdje imamo $\ln 5/2 \neq 0$.

5.7 Izračunati:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(\ln(x^2+2x)-\ln(x^2+1)\right)\right]=\infty\cdot(\infty-\infty).$$

[**R:** $L=2$ **–>** **VIDEO**]

5.8 Pronađimo parametar $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ takav da vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+3}\right)^{ax^2+1}=e^3.$$

Računamo limes na lijevoj strani:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^2+3}\right)^{ax^2+1}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-7}{x^2+3}-1\right)^{ax^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-10}{x^2+3}\right)^{ax^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{-10}}\right)^{ax^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{-10}}\right)^{\frac{x^2+3}{-10}\cdot\frac{-10}{x^2+3}\cdot(ax^2+1)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-10}{x^2+3}\cdot(ax^2+1)}=e^{-10\cdot a}=e^3\implies a=-\frac{3}{10}.\square$$

5.9 [**MI 22.11. 2021.-5.b)**] Izračunajte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+4}.\ [\mathbf{R:}\ L=e^3]$$

Prethodni zadatak se može riješiti u generalnijoj formi.

5.10 [**MI 22.11. 2021.-5.b) spec za $a=2, b=3,$ $c=1, A=3$ i $B=4$**] Izračunati:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{Ax+B},\quad \text{gdje je } a>0,\ b\neq c,\ A>0.$$

[**R:** $L=e^{\frac{(b-c)A}{a}}$ **–>** **VIDEO**]

5.1.2 Poredbeni (sendvič) kriterij

Analogno s poredbenim kriterijem za nizove (podsjeti se **zadatka 4.2)** vrijedi pripadni kriterij za funkcije:

Teorem. Zadane su tri funkcije $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ takve da postoje $\lim_{x\to\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to\infty} h(x)$ i jednaki su odnosno:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L.$$

Tada vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = L\,.$$

5.11 Ako je realan broj $p > 0$, tada pokazati da je:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^p} = 0\,.$$

Znamo da je:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{i} \quad -1 \leq \cos x \leq 1\,,$$

pa je:

$$-\frac{1}{x^p} \leq \frac{\sin x}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{x^p} \leq \frac{\cos x}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}\,.$$

Budući da znamo da je $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, iz prethodnog teorema lako slijedi traženi zaključak za obadva limesa. 👍

Primijetimo da za bilo koju funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $p>0$, na potpuno isti način možemo pokazati da je:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\sin f(x)}{x^p} = 0 \ \text{i} \ \lim_{x\to\infty} \frac{\cos f(x)}{x^p} = 0\,.}$$

5.12 Računamo limes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \sin x^3}{5x^2 + 2\cos x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2 - \sin x^3\right)/x^2}{\left(5x^2 + 2\cos x^4\right)/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x^3}{x^2}}{5 + \frac{2\cos x^4}{x^2}} = \frac{1}{5}\,,$$

uz obavezno objašnjenje na ispitu da je:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x^4}{x^2} = 0\,.$$ 👁️👀

5.13 **JIR 24.8.2020.–3.c)** Izračunati:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(3^x) + 2\cdot 3^x}{2^x + 3^x}.$$

[**R:** $L = 2$ **–> VIDEO**]

5.1.3 Kose i horizontalne asimptote

Definicije. Pravac $y = k_1x + l_1$ se zove **desna kosa asimptota** funkcije $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (k_1x + l_1)| = 0.$$

Specijalno, ako je $k_1 = 0$ tada kažemo da je pravac $y = l_1$ **desna horizontalna asimptota** funkcije $y = f(x)$.

Pravac $y = k_2x + l_2$ se zove **lijeva kosa asimptota** funkcije $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - (k_2x + l_2)| = 0.$$

Specijalno, ako je $k_2 = 0$ tada kažemo da je pravac $y = l_2$ **lijeva horizontalna asimptota** funkcije $y = f(x)$. Prema tome horizontalne asimptote su specijalni slučaj kosih asimptota.

Kako **računski pronaći** koeficijente desne i lijeve kose asimptote dane funkcije? Na primjer, iz prethodne definicije vidimo da je

$$k_1x + l_1 \approx f(x) \text{ za } x \approx \infty \implies k_1 + \frac{l_1}{x} \approx \frac{f(x)}{x} \implies$$

$$k_1 \approx \frac{f(x)}{x} \text{ za } x \approx \infty,$$

a kad smo prvo odredili koeficijent smjera k_1 tada se lako pronađe slobodni koeficijent l_1:

$$k_1x + l_1 \approx f(x) \text{ za } x \approx \infty \implies l_1 \approx f(x) - k_1x \text{ za } x \approx \infty.$$

Sada se sve ovo može napisati u formi limesa, a naravno koeficijenti lijeve kose asimptote se na potpuno isti način pronađu, jedino što je $x \approx -\infty$:

desna kosa asimptota $y = k_1x + l_1$ **od** $y = f(x)$:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad l_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1x\right);$$

lijeva kosa asimptota $y = k_2x + l_2$ **od** $y = f(x)$:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad l_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2x\right).$$

Prema tome jedina razlika u formulama za koeficijente lijeve i desne kose asimptote je u tome što kod lijeve asimptote radimo s limesima gdje $x \to -\infty$ dok kod desne s limesima gdje $x \to \infty$. Ako **jedan od koeficijenata ne postoji tada nema pripadne kose asimptote**.

5.14 Izračunati kose asimptote funkcije:

$$f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 4x}.$$

Primijetimo da je $D(f) = \langle -\infty, -4] \cup [0, \infty\rangle$, pa ova funkcija može imati i lijevu i desnu kosu (horizontalnu) asimptotu:

Račun za desnu kosu asimptotu:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x} = \\ = 3 + \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 3 + 1 = 4,$$

$$l_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(3x + \sqrt{x^2+4x} - 4x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} = \frac{4}{1+1} = 2$$

pa zaključujemo da je pravac $y = 4x + 2$ desna kosa asimptota ove funkcije.✅

Račun za lijevu kosu asimptotu:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 + \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x} =$$

$$= 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x}}{-x} = 3 - \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 3 - 1 = 2,$$

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x + \sqrt{x^2+4x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x} - x\right) =$$

$$= \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1} = \frac{-4}{1+1} = -2$$

pa zaključujemo da je pravac $y = 2x - 2$ desna kosa asimptota ove funkcije.✅ Q.E.D.

Primijetimo, ako je recimo domena neke funkcije oblika $\langle -\infty, a]$, tada **nema smisla tražiti desnu kosu asimptotu** takve funkcije.

5.15 **JIR 29.8.2022.–6.-dio** Odrediti sve asimptote (sada kose-horizontalne) funkcije:
$f(x) = \operatorname{th} \dfrac{x^2}{x-2}$.
[**R:** desna horizontalna je pravac $y = 1$, lijeva horizontalna je pravac $y = -1$. –> VIDEO]

Ostale asimptote ove funkcije, a to su vertikalne, će biti određene u sljedečoj točki.

5.16 **MI 22.11.2021.–5.a)** Odrediti sve asimptote (sada kose-horizontalne) funkcije:
$f(x) = \dfrac{x}{x-1} \operatorname{arctg} x$.
[**R:** desna horizontalna je pravac $y = \pi/2$, lijeva horizontalna je pravac $y = -\pi/2$. –> VIDEO]

Ostale asimptote ove funkcije, a to su vertikalne, će biti određene u sljedečoj točki.

5.17 **JIR 13.7.2021.–4.** Odrediti sve vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje funkcija
$f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+a)^2}$, ima desnu kosu asimptotu,
te za takav a odrediti pripadnu asimptotu.
[**R:** $a = 2$, asimptota je $y = x + 2$. –> VIDEO]

5.2 Limes funkcije kad $x \to a \in \mathbb{R}$

Prvo napišimo oznake i definicije za lijevi i desni limes te limes funkcije $f(x)$ oko točke $x = a \in \mathbb{R}$. Uvjet $a \in \mathbb{R}$ tumačimo da je a realan (konačan) broj, koji ne može biti $\pm\infty$.

Definicija jednostranih limesa funkcije oko $x = a$:

Lijevi limes funkcije $y = f(x)$ oko točke $x = a$ u oznaci:
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ (oprez, ne piše $x \to a$ nego $x \to a^-$):
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t. d. $|f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x \in \langle a-\delta, a\rangle \cap D(f)$.

Desni limes funkcije $y = f(x)$ oko točke $x = a$ u oznaci:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ (oprez, ne piše $x \to a$ nego $x \to a^+$):
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t. d. $|f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x \in \langle a, a+\delta\rangle \cap D(f)$.

Definicija limesa funkcije oko $x = a$:

Limes funkcije $y = f(x)$ oko točke $x = a$ u oznaci:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ (oprez, piše $x \to a$): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t. d.
$|f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x \in \big(\langle a-\delta, a\rangle \cup \langle a, a+\delta\rangle\big) \cap D(f)$.
Primijetimo da je:

$$\langle a-\delta, a\rangle \cup \langle a, a+\delta\rangle = \langle a-\delta, a+\delta\rangle \backslash \{x = a\}.$$

Budući da su ove tri definicije napisane jedna ispod druge lako možemo u sljedećoj točki izvesti neke interesantne zaključke poput egzistencije limesa funkcije u $x = a$ pomoću egzistencije lijevog i desnog limesa.

5.2.1 Lijevi i desni limesi VS limes funkcije

U računskom smislu, traženje lijevog i desnog limesa se svodi na dva esencijalna lijeva i desna limesa funkcije $f(x) = 1/x$:

ESENCIJALNI JEDNOSTRANI LIMESI:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty\,.$$

5.18 *Izračunajmo jednostrane limese funkcije*

$$f(x) = \text{th}\,\frac{x^2}{x^2-4},$$

u točkama u kojim nije definirana. Što je ekvivalentno: "**ispitati ponašanje fukcije na rubu područja definicije**".

Nije teško vidjeti da ova funkcija nije definirana u nul-točkama nazivnika pa prema tome treba izračunati jednostane limese u $x = -2$ i $x = 2$. Prije toga nam trebaju predznaci odnosno pozitivnost ili negativnost nazivnika ove funkcije oko $x = 0$ odnosno od parabole $y = x^2 - 4$ oko njenih nul-točaka $x = -2$ i $x = 2$, što se najpouzdanije vidi s njenog grafa, jer je ova parabola okrenuta prema gore, pa očito vrijedi:

- za $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$ je $x^2 - 4 > 0$,
- za $x \in \langle -2, 2\rangle$ je $x^2 - 4 < 0$,

$\Longrightarrow$

- $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = \text{th}\,\frac{(-2)^2}{(-2^-)^2-4} = \text{th}\,\frac{4}{0^+} = \text{th}(\infty) = 1,$
- $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = \text{th}\,\frac{(-2)^2}{(-2^+)^2-4} = \text{th}\,\frac{4}{0^-} = \text{th}(-\infty) = -1,$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \text{th}\,\frac{2^2}{(2^-)^2-4} = \text{th}\,\frac{4}{0^-} = \text{th}(-\infty) = -1,$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \text{th}\,\frac{2^2}{(2^+)^2-4} = \text{th}\,\frac{4}{0^+} = \text{th}(\infty) = 1.$ ❑

Ne zaboravimo da je:

◎☞ $(0^-)^{2n-1} = 0^-, (0^-)^{2n} = 0^+,$

◉☞ $\displaystyle\frac{1}{(0^-)^{2n-1}} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{(0^-)^{2n}} = \frac{1}{0^+} = \infty\,,$

✿☞ $\ln 0^+ = -\infty$….. za više detalja vidi **Zadatak 5.39** .

Glavni rezultat u ovoj točki koji koristimo a koji se lako dokaže kada usporedimo tri definicije napisane na prethodnoj stranici je sljedeći **KRITERIJ ZA POSTOJANJE LIMESA U TOČKI**:

$$L := \lim_{x\to a} f(x) \textbf{ postoji } \iff \textbf{postoje } L_1 := \lim_{x\to a^-} f(x) \textbf{ i } L_2 := \lim_{x\to a^+} f(x) \textbf{ i } L_1 = L_2 = L.$$

Obratom po kontrapoziciji prethodne tvrdnje dobivamo novi isto tako često korišteni **KRITERIJ ZA NE POSTOJANJE LIMESA U TOČKI** :

$\lim_{x\to a} f(x)$ **NE postoji** $\iff$

barem jedna od sljedeće 3 tvrdnje je točna:

- $L_1 := \lim_{x\to a^-} f(x)$ **NE postoji** ,
- $L_2 := \lim_{x\to a^+} f(x)$ **NE postoji** ,
- L_1 **i** L_2 **postoje ali** $L_1 \neq L_2$.

Sada možemo odgovoriti na sljedeće "limesno" pitanje vezano uz funkciju iz **zadatka 5.18 .**

5.19 *Postoje li sljedeći limesi:*

$$\lim_{x\to-2} \operatorname{th} \frac{x^2}{x^2-4} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2} \operatorname{th} \frac{x^2}{x^2-4} \text{ ? } \textbf{NE!}$$

Kao što smo izračunali u **zadatku 5.18**, jednostrani limesi u $x = -2$ postoje, ali su različiti pa po prethodnom kriteriju ne postoji prvi limes. No, isto ovo vrijedi i za drugi limes. □

5.20 **MI 26.11.2019.-5.a)** Postoji li

$$\lim_{x\to-1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2x+2}\right) \text{ ?}$$

[**R:** Ne postoji, jer je :

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to-1^+} f(x) \text{]}$$

Ovaj zadatak se može riješiti u općenitijem obliku.

5.21 Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija takva da je $g(a^-) = g(a^+) = g(a) > 0$. Postoji li

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arctg}\left(\frac{g(x)}{x-a}\right) \text{ ?}$$

[**R:** Ne postoji, jer je:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to a^+} f(x)$$ **–> VIDEO**]

5.2.2 Ponašanje funkcije na rubu područja definicije i vertikalne asimptote

Ako je područje definicije neke funkcije $f(x)$ unija više intervala, kao na primjer $D(f) = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle c, \infty\rangle$, tada se točke $x = a$ i $x = c$ zovu **rubovi područja definicije** $D(f)$. U ovakvom slučaju je potrebno **ispitati ponašanje funkcije na rubovima područja definicije** odnosno u prevodu potrebno je izračunati jednostrane limese funkcije u rubovima domene, u ovom primjeru to su jedino mogući:

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ i $\lim_{x\to c^+} f(x)$.

Primijetimo da za $D(f) = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle c, \infty\rangle$ jednostrani limesi of $f(x)$ kad $x \to a^+$ i $x \to c^-$ nemaju smisla jer funkcija nije definirana na intervalu $[a, c]$ (ovo je takozvana "rupa" u području definicije).

Definicija. *Ako je* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ *ili* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *, tada se kaže da je pravac* $x = a$ ***vertikalna asimptota funkcije*** $f(x)$*. Ako su obadva jednostrana limesa u* $x = a$ *konačna, tada pravac* $x = a$ ***nije vertikalna asimptota funkcije*** $f(x)$.

5.22 *Naći vertikalne asimptote funkcije*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x^3 .$$

Rješenje. Iako se u zadatku ne traži domena dobro je prvo pronaći domenu. Naime jedini kritični slučaj je razlomak $1/x$ pa zbog njega trebamo pretpostaviti da je $x \neq 0$, što nas direktno vodi do domene ove funkcije:

$$D(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle.$$

Prema tome $x = 0$ je jedini rub domene ove funkcije i trebamo u njemu ispitati njen lijevi i desni limes:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0^-) = e^{\frac{1}{0^-}} - 0^3 = e^{-\infty} - 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+) = e^{\frac{1}{0^+}} - 0^3 = e^{\infty} - 0 = \infty .$$

Budući da postoji jednostrani limes u $x = 0$ koji nije konačan, po definiciji zaključujemo da je **pravac** $x = 0$ **vertikalna asimptota** ove funkcije. ☐

5.23 *Odrediti domenu, ispitati ponašanje funkcije na rubovima domene te potom napisati vertikalne asimptote funkcije*:

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x-1} .$$

Rješenje. Jedini uvjet na domenu je stroga pozitivnost razlomka unutar logaritamske funkcije:

$$\frac{x+2}{x-1} > 0 \iff x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle = D(f).$$

Kao što vidimo, domena ima dva ruba no nema smisla ispitivati desni limes u $x = -2$ i lijevi limes u $x = 1$ jer funkcija nije definirana na intervalu $[-2,1]$:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2^-) = \ln\frac{0^-}{-3} = \ln 0^+ = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1^+) = \ln\frac{3}{0^+} = \ln\infty = \infty.$$

Na kraju zaključujemo da su **pravci** $x = -2$ **i** $x = 1$ **vertikalne asimptote ove funkcije**. 🎺

A kako zadaci ovog tipa izgledaju na pismenom? ⤵️

5.24 **JIR 03.9.2020.-6)-dio** Naći domenu i ispitati ponašanje na rubovima domene funkcije

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{2}{x^2 + x}\right)$$ **–> VIDEO** ▶️

[**R:** $D(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, pravci: $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ su vertikalne asimptote]

Sada slijedi nastavak **Zadatka 5.15**.

5.25 **JIR 29.8.2022.–6.-dio** Odrediti sve asimptote (sada vertikalne) funkcije:

$$f(x) = \operatorname{th}\frac{x^2}{x-2}.$$

[**R:** $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \Longrightarrow x = 2$ **nije** vertikalna asimptota **–> VIDEO** ▶️]

Sada slijedi nastavak **Zadatka 5.16 .**

5.26 **MI 22.11.2021.–5.a)** Odrediti sve asimptote (sada vertikalne) funkcije:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}\operatorname{arctg} x.$$

[**R:** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \Longrightarrow x = 1$ **je** vertikalna asimptota **–> VIDEO** ▶️]

5.2.3 Esencijalni limesi kad $x \to 0$

Sljedeći limesi funkcija kad $x \to 0$ se jako često koriste u limesima drugih funkcija oblika $0/0$, pa ih zbog toga možemo nazvati "esencijalnim" ili "baznim" ili posebno važnim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \implies \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Sada ćemo posebno razmotriti primjenu svaka od ova 3 esencijalna limesa.

5.27 Riješimo sljedeće limese pomoću odgovarajuće supstitucije te koristeći

ESENCIJALNI LIMES: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$

A. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1.$

B. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = \frac{0}{0} = |x^3 = t| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

C. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(5x)}{x}\right)^2 = |5x = t| = \lim_{t\to 0} \left(\frac{5\sin t}{t}\right)^2 = 25 \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 25.$

D. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x^2)}{x^2} = |5x^2 = t| = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin t}{t} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 5.$

E. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(7x^2)}{x^6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(7x^2)}{x^2}\right)^3 = |7x^2 = t| = \lim_{t\to 0} \left(\frac{7\sin t}{t}\right)^3 = 7^3 \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 = 7^3.$

F. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x} = |t = \arcsin(2x) \implies x = \sin(t)/2| = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)/2} = \frac{2}{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{1} = 2.$

G. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\cos(3x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$

H. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th}(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{x^2 \operatorname{ch}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{ch}(x^2)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{x^2} = 1 \cdot 1 = 1.$

I. $$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(5x)}{\sin(7x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\left(\frac{5\arcsin(5x)}{5x}\cdot\frac{7x}{7\sin(7x)}\right)=$$
$$=\frac{5}{7}\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(5x)}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{7x}{\sin(7x)}=\frac{5}{7}\cdot1\cdot1=\frac{5}{7}.$$

J. $$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=$$
$$=|x-1=t|=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}=$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)\cos\pi+\cos(\pi t)\sin\pi}{t}=$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{t}=-\frac{\pi}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}=-\frac{\pi}{3}.$$

K. $$\lim_{x\to0}\frac{(x+3)\sin x}{x^2-4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{(x+3)\sin x}{x(x-4)}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x-4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{3}{4}\cdot1=-\frac{3}{4}.$$

5.28 Riješimo sljedeće limese pomoću odgovarajuće supstitucije te koristeći

ESENCIJALNI LIMES: $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

A. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\frac{0}{0}=|x^2=t|=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

B. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=|2x=t|=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t/2}=2\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=2.$$

C. $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2xe^x}=|2x=t|=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{te^{t/2}}=\lim_{t\to0}\frac{1}{e^{t/2}}\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1\cdot1=1.$$

D. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin(2x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{2\sin x\cdot\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$$
$$=|\sin x=t|=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=\frac{1}{2}.$$

E. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}(e^x-1)}{2x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}.$$

F. $$\lim_{x\to2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{e^{x-2}-1}{(x-2)(x+2)}=|x-2=t|=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t(t+4)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t+4}\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}.$$

G. $\lim_{x\to0}\frac{(1-e^{2x})^3}{\sin^3 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-e^{2x}}{\sin 2x}\right)^3=$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{\sin 2x}\right)^3=\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-e^{2x}}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\right)^3=\left(\frac{-1}{1}\right)^3=-1.$$

5.29 Riješimo sljedeće limese pomoću odgovarajuće supstitucije te koristeći

ESENCIJALNI LIMES: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

A. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)^3}{x}=\frac{0}{0}=3\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=|2x=t|=$

$$=3\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t/2}=6\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=6\cdot1=6.$$

B. Iz $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ slijedi $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Zaista:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1.$$

C. Iz $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ slijedi $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Zaista:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\left|t=e^x-1\implies x=\ln(1+t)\right|=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1.$$

D. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{2x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$. □

5.30 **MI 22.11.2021.** Izračunati

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{e^{4x}-1}}{\sqrt[3]{x}}.\ [\textbf{R:}\ L=\sqrt[3]{4}]$$

Istom metodom riješit ćemo generalniji zadatak.

5.31 [**MI 22.11.2021.** spec. za $b=3$ i $p=3$].

Neka je $b>0$. Izračunat $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[p]{e^{bx}-1}}{\sqrt[p]{x}}$.

[**R:** $L=\sqrt[p]{b}$ –> **VIDEO**]

5.3 Primjena limesa na neprekinutost funkcije

Za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kažemo da je **neprekinuta u točki** $x=a,\ a\in D(f)$ ako vrijedi:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ takav da je } |f(x)-f(a)|<\varepsilon,\quad \forall x\in\langle a-\delta,a+\delta\rangle\cap D(f).$$

Sada ćemo ispod ove definicije ponoviti definiciju limesa funkcije oko točke $x=a$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ takav da je } |f(x)-L|<\varepsilon,\quad \forall x\in\big(\langle a-\delta,a\rangle\cup\langle a,a+\delta\rangle\big)\cap D(f).$$

Ako usporedimo ove dvije definicije lako se pokaže slijedeći kriterij za neprekinutost funkcije u točki $x=a$ preko njenog limesa u toj točki.

Grafički to znači da graf neprekinute funkcije $y=f(x)$

$y=f(x)$ je **neprekinuta u** $x=a \iff a\in D(f)$, **postoji** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

neprekinuto prolazi kroz svoju točku $(a,f(a))$.

Budući da smo limes funkcije u točki mogli odrediti i pomoću njenih jednostranih limesa u toj točki, onda se prethodni kriterij može zapisati i pomoću lijevog i desnog limesa funkcije.

$y=f(x)$ je **neprekinuta u** $x=a \iff a\in D(f)$, **postoji** $L_1:=\lim\limits_{x\to a^-} f(x),\ L_2:=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i $L_1=L_2=f(a)$.

Kako fukcioniraju ova dva ekvivalentna kriterija za neprekidnost funkcije u točki, pogledajmo na sljedećim zadacima.

5.32 **MI 22.11.2021.–5.c)** Odrediti parametar $a\in\mathbb{R}$ takav da funkcija:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}, & x>0,\\ a+\cos(3x), & x\le 0,\end{cases}$$

bude neprekinuta u $x=0$. [**R:** $a=2$]

Istom metodom riješit ćemo generalniji zadatak.

5.33 Neka su $M \in \mathbb{R}$, $M \neq 0$ i $m \in \mathbb{N}$. Odrediti parametar $a \in \mathbb{R}$ takav da funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} Mx}{x}, & x > 0, \\ a + (M-2)\cos(mx), & x \leq 0, \end{cases}$$

bude neprekinuta u $x = 0$. [**R:** $a = 2$ **->** VIDEO]

Specijalno za $M = 3$ i $m = 3$ lako je vidjeti da je **zadatak 5.33** specijalan slučaj **zadatka 5.32** .

Definicija. Kaže se da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **neprekinuta na domeni** $D(F)$ (ili **na intervalu** $I \subseteq D(f)$) ako je neprekinuta u svakoj točki svoje domene (ili intervala I).

Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **proširenje po neprekinutosti funkcije** $f : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ ako je $F(x)$ neprekinuta na svojoj domeni i $F(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R} \backslash \{a\}$.

Budući da smo na prethodnoj stranici ustanovili vezu između limesa funkcije u točki i njene neprekinutosti u toj točki, lako je izvesti sljedeći kriterij o tome kada se može dana funkcija proširiti po neprekinutosti.

$f : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ se **može proširiti po neprekinutosti na** $\mathbb{R}$ kao postoji $L = \lim_{x \to a} f(x)$. Tada to proširenje definiramo

Definicija. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ neprekinuta na intervalima $\langle -\infty, a\rangle$ i $\langle a, \infty\rangle$, te neka postoji $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Tada se $f(x)$ **može proširiti po neprekinutosti na cijeli** $\mathbb{R}$, a proširenje je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s formulom:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ L, & x = a. \end{cases}$$

U sljedećem zadatku primjenimo prethodni kriterij za proširenje funkcije na $\mathbb{R}$ po neprekinutosti.

5.34 JIR 7.9.2021.–4.) Za koje $a > 0$ se funkcija:

$$f(x) = \frac{e^{2/x} + e^{1/x} + 3}{e^{2/x} + a},$$

može proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$?

[**R:** $a = 3$ **->** VIDEO]

5.4 Studentski i pro-fini zadaci

Na kraju ovog šetog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak zajedno s rješenjem i postupkom neka ga pokaže Profi ili **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti dodatne zanimljivije zadatke😎 , koji su "pro-fini".

5.35 **MI 26.11.2019.** Odrediti parametar $a > 0$ takav da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, & x < 3, \\ \sqrt{a + x^2}, & x \geq 3, \end{cases}$$

bude neprekinuta na $\mathbb{R}$.

[**R:** $a = 27^2 - 9 = 720$ **–> VIDEO**▶️]

5.36 **JIR 4.9.2019.-3.b),c)** Za $a, b \in \mathbb{R}$ zadana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin(ax)}{x}, & x < 0, \\ \frac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Uz koje uvjete na a i b se funkcija: A) može proširiti po neprekidnosti u $x = 0$; B) ne može?

[**RA:** $b - a = 1$, **RB:** $b - a \neq 1$ **–> VIDEO**▶️]

5.37 [Predložio i riješio student **Andrija Petrušić**]

$$\frac{e^x}{x} \to \infty \text{ kada } x \to \infty.$$

Nije nužno koristiti L'Hospitalovim pravilom, koje vježbamo u 9. dijelu gradiva, kako to? Sljedeći način samo koristi poznatu elementarnu nejednakost: $e^x \geq x, \forall x \geq 0$, te:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{(e^{\frac{x}{2}})^2}{x} \geq \frac{(\frac{x}{2})^2}{x} = \frac{x^2}{4x} = \frac{x}{4} \to \infty \text{ kada } x \to \infty. \ ❑ ✅$$

5.38 Radili smo limese kad $x \to a$ na dva načina: pomoću lijevog i desnog limesa te preko esencijalnih limesa. Kako znamo kada koji način primjeniti?

[**R.** Ako limes u sebi sadrži obllik $\frac{0}{0}$ tada primijeniti esencijalne limese, a ako sadrži $\frac{1}{0^-}$ ili $\frac{1}{0^+}$ tada primijeniti jednostrane limese.]

5.39 [Predložila i napisala studentica **Irma Pušec**] Napisati na jednom mjestu jednostrane limese funkcije $f(x)$ u rubovima njene domene za neke najinteresantnije elementarne funkcije $f(x)$ ($x = \pm\infty$ isto računamo kao rubove domene):

◉☞ $\frac{1}{0^-} = -\infty$, $\frac{1}{0^+} = \infty$;

♠☞ $\frac{1}{(0^-)^{2n-1}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\frac{1}{(0^-)^{2n}} = \frac{1}{0^+} = \infty$;

✿☞ $\ln 0^+ = -\infty$, $\ln\infty = \infty$;

♠☞ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}^+\right) = -\infty$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = \infty$;

♣☞ $\operatorname{ctg}(0^+) = \frac{1}{\operatorname{tg}(0^+)} = \infty$, $\operatorname{ctg}(\pi^-) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi^-)} = -\infty$;

✿☞ $e^{-\infty} = 0$, $e^{\infty} = \infty$;

✳☞ $\operatorname{th}(-\infty) = -1$, $\operatorname{th}(-\infty) = -1$;

✿☞ $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

5.40 Odrediti sve vrijednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3} & \text{za } x < 3, \\ 2b-5 & \text{za } x = 3, \\ a\,\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27} & \text{za } x > 3, \end{cases}$$

neprekinuti u točki $x = 3$.

[**R.** Pomoću alebarskih formula:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

razlomci u $f(x)$ se mogu skratiti jer vrijedi:

$\sqrt{x} - 9 = (\sqrt[4]{x})^2 - 3^2 = (\sqrt[4]{x} - 3)(\sqrt[4]{x} + 3)$

$x - 27 = (\sqrt[3]{x})^3 - 3^3 = (\sqrt[3]{x} - 3)(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9)$,

pa nakon kračenja, funkcija $f(x)$ poprima jednostavniji oblik:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x} + 3 & \text{za } x < 3, \\ 2b - 5 & \text{za } x = 3, \\ \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9} & \text{za } x > 3. \end{cases}$$

Da bi ova funkcija bila neprekinuta u $x = 3$ potrebno je zadovoljiti uvjet $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ odnosno u ovoj situaciji:

$$\sqrt[4]{3} + 3 = 2b - 5 = \frac{a}{\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3} + 9},$$

iz čega direktno slijedi:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3} + 4 \quad \text{i} \quad b = (\sqrt[4]{3} + 3)(\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3} + 9).\ \mathbf{]}$$

5.5 POPULARNA TEORIJSKA PITANJA NA ISPITIMA IZ ŠESTOG DIJELA GRADIVA

• Limes ako postoji je jedinstven:

ako je $L_1 = \lim\limits_{x\to A} f(x)$ i $L_2 = \lim\limits_{x\to A} f(x)$ tada:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) - (L_2 - f(x))| \le$$

$$\le |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odnosno:

$$0 \le |L_1 - L_2| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow |L_1 - L_2| = 0 \Longrightarrow L_1 = L_2\ .\square$$

• **Kriterij** za postojanje limesa pomoću jednostanih limesa;
Kriterij za **NE postojanje** limesa pomoću jednostanih limesa.

• Dokaz za jedan od esencijalnih limesa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\ ;\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(**zadatak 5.29.B** i **C**) .

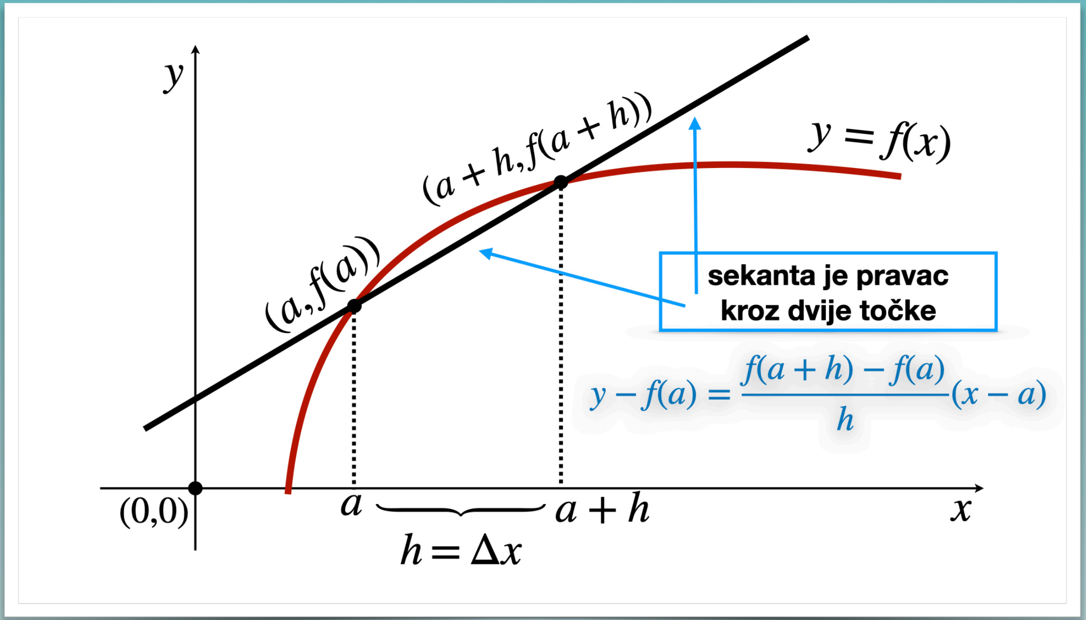
• Veza limesa i neprekidnosti funkcije u danoj točki – **točka 5.3** .

ŠESTI DIO

DERIVACIJA:

Točke $(a, f(a))$ i $(a+h, f(a+h))$ se nalaze na grafu funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$. Znamo da se pravac kroz ove dvije točke zove **sekanta** i ima jednadžbu:

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a)\,.$$



Ako pretpostavimo da je $f(x)$ neprekinuta fukcija tada točke $(a+h, f(a+h)) \to (a, f(a))$ kada $h \to 0$, dok istovremeno pripadna sekanta kroz ove dvije točke **prelazi u pravac kroz jednu točku** $(a, f(a))$ **koji dodiruje graf funkcije** $f(x)$ u toj točki, takozvana **tangenta na** $y = f(x)$ **u točki** $(a, f(a))$. Dakle, tangenta je dobivena od prethodnih sekanti kada $h \to 0$, odnosno:

$$y - f(a) = \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)(x - a).$$

Koeficijent tangente, ako postoji, kraće se označava s

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: \frac{df}{dx}(a),$$

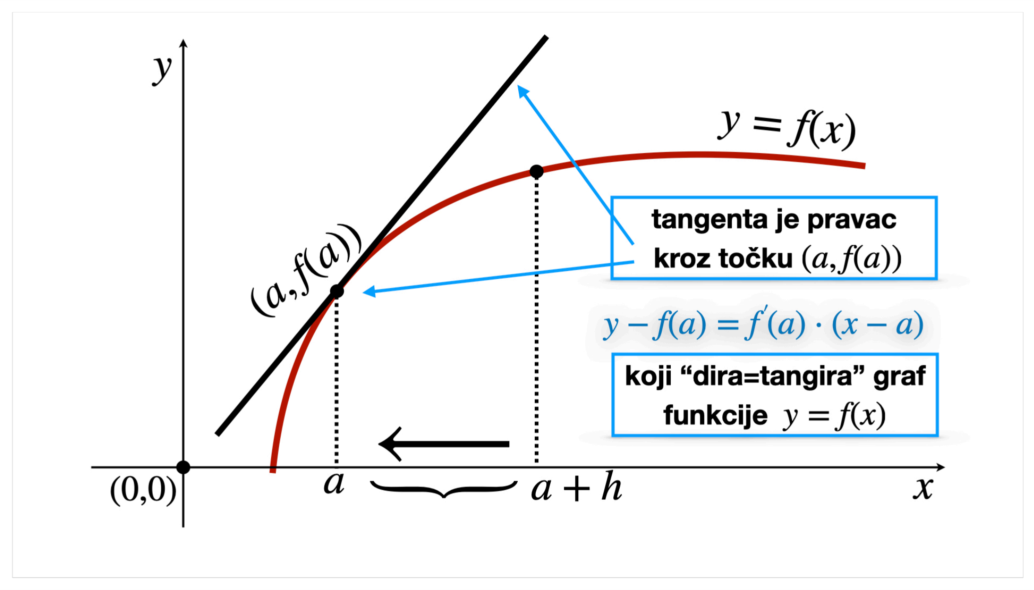
i čita se "derivacija funkcije $f(x)$ u točki $x = a$." Tada **jednadžba tangente na** $y = f(x)$ **u točki** $x = a$ je :

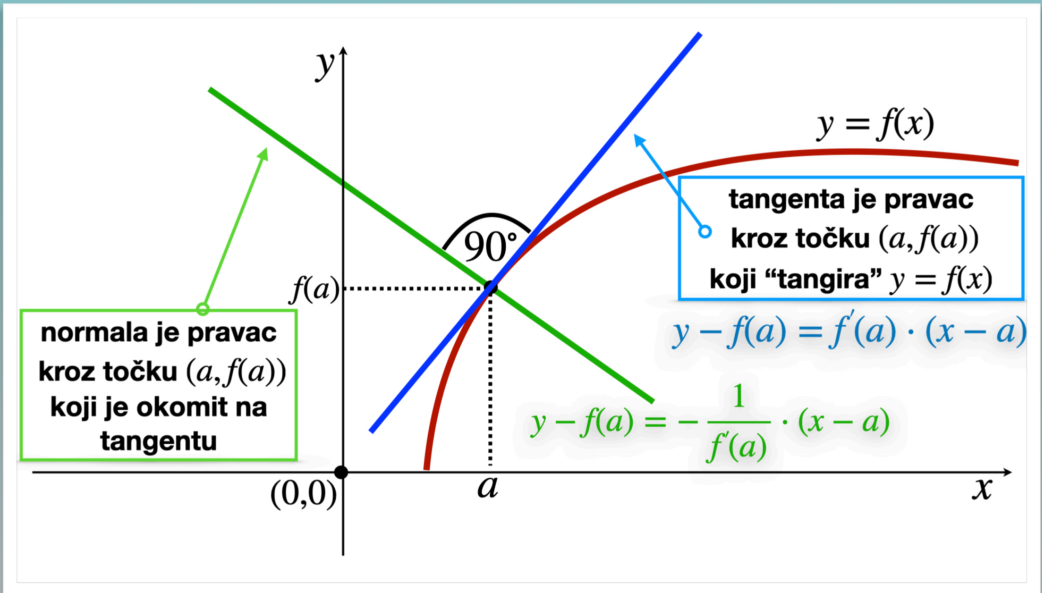
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

Koeficijent $f'(a)$ se zove **derivacija funkcije** $f(x)$ **u** $x = a$.

Pravac koji je okomit na ovu tangentu se zove **normala na** $y = f(x)$ **u točki** $(a, f(a))$ i zbog toga ima jednadžbu

$$y - f(a) = k \cdot (x - a), \text{ gdje je } k = -1/f'(a)$$





Na prethodnoj stranici smo dali **geometrijsku motivaciju za uvođenje pojma derivacije**. Sada to proširujemo na nivo funkcije.

6.1 Derivacija po definiciji

Definicija. Derivacija funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ je jedna nova funkcija $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ili $\frac{df}{dx}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, koja je definirana formulom:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: \frac{df}{dx},$$

ili ako mali pomak h zamjenimo s Δx:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}.$$

Naravno, **područje definicije derivacije** od funkcije $f(x)$ je skup svih realnih brojeva u kojima prethodni limes postoji odnosno:

$$D(f') = \left\{ x\in D(f) : \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ postoji} \right\}.$$

6.1 Po definiciji derivacije računamo:

A: $f(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ($f(x)$ je konstanta funkcija)

$\Longrightarrow f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; detalji **–>** VIDEO

B: $f(x)=x^2+3x$, $x\in\mathbb{R} \Longrightarrow f'(x)=2x+3$, $x\in\mathbb{R}$; zaista:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-x^2-3x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+3) = 2x+3.$$

C: $f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N} \Longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}$; detalji **–>** VIDEO

6.2 **ZIR 15.2.2021.–3.b)** Po definiciji izvedite derivaciju funkcije $f(x)=\sqrt{x}$.

[**R: –>** VIDEO]

6.3 Po definiciji derivacije računamo:

A: $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R};$
detalji **–>** **VIDEO**

B: $f(x) = \ln x,\ x > 0 \Longrightarrow f'(x) = 1/x,\ x > 0;$
detalji **–>** **VIDEO**

C: $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R};$
detalji **–>** **VIDEO**

6.4 **MI 26.11.2019.–6.a)** Koristeći definiciju derivacije pokazati da je $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.
[**R: –>** **VIDEO**]

6.5 **ZIR 17.02.2020.–3.a)** Koristeći definiciju derivacije izračunati $f'(\pi/4)$ za funkciju $f(x) = \sin(3x)$. [**R: –>** **VIDEO**]

6.2 Derivacija algebarskih operacija

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabline funkcije odnosno imaju derivacije $f'(x)$ i $g'(x)$, tada vrijede:

SVOJSTVA DERIVACIJE:

1) $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x),$

2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$

3) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

6.6 Po ovim pravilima računamo:

A: $f(x) = 3x^2 - 4x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 6x - 4$. ❑

B: $f(x) = x^2 \ln x \Longrightarrow$
$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1).$$ ❍

C: $f(x) = e^{2x} \Longleftrightarrow f(x) = e^x \cdot e^x \Longrightarrow$
$$f'(x) = (e^x \cdot e^x)' = (e^x)' \cdot e^x + e^x \cdot (e^x)' = = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^x \cdot e^x = 2e^{2x}.$$ ♣

D: $f(x) = e^{-x} \iff f(x) = \dfrac{1}{e^x} \Longrightarrow$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{1' \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$

E: $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Longrightarrow f'(x) = \operatorname{ch} x;$

detalji –> **VIDEO**

F: $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

detalji –> **VIDEO**

G: $f(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

detalji –> **VIDEO** ♡

6.7 Računamo derivaciju sljedećih funkcija:

A: $f(x) = \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) \cdot e^x \Longrightarrow$

$$f'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' \cdot e^x + \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) \cdot (e^x)' = $$
$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^x + \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) \cdot e^x = $$
$$= \left(\ln x + \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^x.$$

B: $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sh} x \Longrightarrow f'(x) = e^{2x}.$

C: $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{3 - 2\cos x} \Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{-\cos x\,(3 - 2\cos x) - (2 - \sin x) \cdot 2 \cdot \sin x}{(3 - 2\cos x)^2} = $$
$$= \frac{2 - 3\cos x - 4\sin x}{(3 - 2\cos x)^2}.$$

D: $f(x) = \dfrac{3 + \sin x}{2\cos x - 5} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2 - 5\cos x + 6\sin x}{(2\cos x - 5)^2}.$ ♧

6.3 Derivacija složene funkcije - kompozicije

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ dvije diferencijabilne funkcije na svojim domenama takva da je $Im(f) \subseteq D(g)$. Tada je kompozicija $g \circ f$ isto diferencijabilna na svojoj domeni te njenu derivaciju možemo računati i po ovoj formuli, tzv. **lančano pravilo za derivaciju kompozicije**:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Induktivno se ova formula lako proširi na kompoziciju od tri i više funkcija:

$$(f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(x) = f_3'((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x).$$

6.8 Po ovim pravilima računamo:

A: $f(x) = e^{-x} \Longleftrightarrow f(x) = f_2(f_1(x))$ za $f_1(x) = -x,\ f_2(x) = e^x$

$$\Longrightarrow f'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x},$$

ili kratko: $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$. ☀

B: $f(x) = e^{2x} \Longleftrightarrow f(x) = f_2(f_1(x))$ za $f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = e^x$

$$\Longrightarrow f'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x},$$

ili kratko: $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$. ♤

C: $f(x) = \sin^5(x^7) \Longleftrightarrow$

$f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ za $f_1(x) = x^7,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = x^5,$

$$\Longrightarrow f'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'((f_1(x)) \cdot f_1'(x) =$$
$$= 5\sin^4(x^7) \cdot \cos(x^7) \cdot 7x^6,$$

ili kratko: $(\sin^5(x^7))' = 5\sin^4(x^7) \cdot \cos(x^7) \cdot 7x^6$. ★

D: $f(x) = \sin^7(x^5) \Longleftrightarrow$

$f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ za $f_1(x) = x^5,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = x^7,$

$$\Longrightarrow f'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'((f_1(x)) \cdot f_1'(x) =$$
$$= 7\sin^6(x^5) \cdot \cos(x^5) \cdot 5x^4,$$

ili kratko: $(\sin^7(x^5))' = 7\sin^6(x^5) \cdot \cos(x^5) \cdot 5x^4$.

E: $f(x) = \ln(ax) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$; detalji **–> VIDEO** ▶ ☺

6.9 Po lančanom pravilu za derivaciju računamo:

A: $f(x) = x^c,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = cx^{c-1}$; detalji **–> VIDEO** ▶

B: $f(x) = \sqrt[3]{\ln(3x) + \mathrm{tg}(2x)} \Longrightarrow f'(x) = ?$

detalji **–> VIDEO** ▶

C: $f(x) = \mathrm{sh}\dfrac{\ln(5x^2)}{e^{4x}} \Longrightarrow f'(x) = ?$ detalji **–> VIDEO** ▶

6.10 **ZIR 15.2.2021.–3.c)** Izračunati $f'(0)$ ako je

$$f(x) = \sqrt{e^{-\sin 2x}}.$$

[**R: I. način –> VIDEO** ▶] [**R: II. način –> VIDEO** ▶]

6.11 **ZIR 17.02.2020.–3.b)** Izračunati derivaciju funkcije $f(x) = \ln^2\big(\mathrm{arctg}(5x)\big)$.

[**R: –> VIDEO** ▶]

6.4 Derivacija oblika $f(x)^{g(x)}$

Za slučaj da trebamo derivirati funkciju oblika $f(x)^{g(x)}$, što je složenije od **Zadatka 6.9.A** onda koristimo "trik" baziran na činjenici da je $e^{\ln x} = x$ i $b \cdot \ln c = \ln c^b$:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}}$$

a koji se koristi kada deriviramo općenitu eksponencijalnu funkciju a^x i $f(x)^{g(x)}$:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a\,,$$

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})' = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))' =$$
$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Ova se formula ne uči napamet nego se ovaj postupak stalno iznova izvodi kod svakog novog zadatka ovog tipa, kao što sllijedi.

6.12 Računamo derivacije sljedećih funkcija zadanih u obliku $f(x)^{g(x)}$:

A: $f(x) = x^{\sqrt{x}} \Longrightarrow f(x) = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \Longrightarrow$

$$f'(x) = (e^{\sqrt{x} \cdot \ln(x)})' = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(x)}\left(\sqrt{x} \cdot \ln(x)\right)' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

B: $f(x) = (\sin x)^{x^3} \Longrightarrow f(x) = e^{x^3 \cdot \ln(\sin x)} \Longrightarrow$

[**RB:** $f'(x) = x^2 \cdot (\sin x)^{x^3}\left(3 \ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg}(x)\right)$]

C: $f(x) = (\ln x)^{\ln x} \Longrightarrow f(x) = e^{(\ln x) \cdot \ln(\ln x)} \Longrightarrow$

$$f'(x) = e^{(\ln x) \cdot \ln(\ln x)}\left((\ln x) \cdot \ln(\ln x)\right)' =$$
$$= (\ln x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x}\right).$$

D: $f(x) = (\operatorname{sh} x)^{\sin x} \Longrightarrow f(x) = e^{\sin x \cdot \ln(\operatorname{sh} x)} \Longrightarrow$

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln(\operatorname{sh} x)}\left(\sin x \cdot \ln(\operatorname{sh} x)\right)' =$$
$$= (\operatorname{sh} x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln(\operatorname{sh} x) + \sin x \cdot \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right).$$

6.5 Derivacije višeg reda

Derivacija drugog reda funkcije $f(x)$ se definira kao derivacija prve derivacije, derivacije trećeg reda kao prva derivacija druge derivacije i tako dalje induktivno:

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ili } \frac{d^2f}{dx^2} := \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$f'''(x) := (f''(x))' \text{ ili } \frac{d^3f}{dx^3} := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$$

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))' \text{ ili } \frac{d^nf}{dx^n} := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$$

Primjetimo da $f^4(x)$ je oznaka za četvrtu kompoziciju od $f(x)$ dok $f^{(4)}(x)$ označava četvrtu derivaciju od $f(x)$ odnosno:

$$f^4(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x) \quad \text{i} \quad f^{(4)}(x) = (f'''(x))'.$$

Slično je i za $n-$tu kompoziciju i derivaciju $n-$tog reda:

$$f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x) \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

6.13 Pokažimo da za funkciju $f(x) = -\,e^{-x^2}$ vrijedi:

$$f'(0) = 0 \text{ i } f''(0) > 0\,.$$

Zaista, idemo računati prvu i drugu derivaciju ove funkcije:

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} \text{ i } f''(x) = (2xe^{-x^2})' = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$$

iz čega slijedi: $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 2 > 0$. ✓❑

6.14 Pokažimo da za funkciju $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ vrijedi:

$$f''(x) < 0 \quad \text{za } x > e^2\,.$$

Zaista, idemo računati prvu i drugu derivaciju ove funkcije:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{1\cdot \ln x - x\cdot 1/x}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \implies$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}\right)' = -\frac{1}{x\ \ln^2 x} + \frac{2}{x\ \ln^3 x} = $$

$$= -\frac{1}{x\ \ln^3 x}\cdot(\ln x - 2).$$

Primijetimo da je $\ln x - 2 > 0 \iff \ln x > 2 \iff x > e^2$ iz čega slijedi da je $f''(x) < 0$ za $x > e^2$. ❑✅

6.15 Matematičkom indukcijom pokažimo da za funkciju $f(x) = e^{2x}$ vrijedi: $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

❍ Baza indukcije: za $n = 1$ je $f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$. ✓

❍ Korak indukcije: želimo pokazati da ako za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ tada je i $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}e^{2x}$; zaista:

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (2^n e^{2x})' = 2 \cdot 2^n e^{2x} = 2^{n+1}e^{2x}$. ✓ ❑

6.6 Derivacija inverzne funkcije

Neka je $y = f(x)$ bijekcija koja ima derivaciju na svojoj domeni. Tada se derivacija njene inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$ može računati i po ovoj formuli:

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$; dokaz –> VIDEO ▶

6.16 Po gornjoj formuli ćemo pokazati da

A: $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\};$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \iff y = f(x) = x^3$$
$$\implies \frac{d}{dy}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{\frac{dx^3}{dx}} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$
$$\implies \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Naravno do ovog rezultata smo mogli doći i preko formule iz **Zadatka 6.8.A**: $(x^c) = cx^{c-1}$ specijalno za $c = 1/3$ odnosno :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.\ \square$$

B: $f(x) = \arcsin x,\ x \in [-1,1] \implies$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \langle -1,1\rangle$; detalji–> VIDEO ▶

C: $f(x) = \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; detalji–> VIDEO ▶

6.17 Znamo, klikni **Zadatak 3.15** , da je inverzna funkcija sinus hiperbolne funkcije $f(x) = \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ isto tako eksplicitno zadana formulom: $f^{-1}(x) = \operatorname{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Zbog toga derivaciju od areasinus hiperbolne funkcije možemo izračunati na dva načina.

I. način:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Arsh}\,(x))' &= \left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x)\right) = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

II. način:

$$(\mathrm{Arsh}\,(y))' = \frac{1}{(\mathrm{sh}\,(x))'} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,(x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

6.7 Diferencijabilnost i neprekidnost

U **točki 6.1** smo za da funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ definirali njenu derivaciju kao jednu novu funkciju u oznaci $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ili $\frac{df}{dx}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, formulom:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{0} =: \frac{df}{dx}.$$

Sada otvaramo pitanje postojanja derivacije u nekoj točki, pa zbog jednostavnijeg pisanja uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija. Kažemo da je f-ja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **diferencijabilna** odnosno **derivabilna u točki** $x=a$ ako postoji njena derivacija u toj točki odnosno postoji sljedeći limes:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

To znači da umjesto tvrdnje "**funkcija ima derivaciju u točki**" ponekad je lakše ili profesionalnije reći "**funkcija je derivabilna u točki**" odnosno "**funkcija je diferencijabilna u točki**".

Budući da je derivacija specijalno jedan limes razlomka oblika $0/0$, to postojanje ovog limesa možemo riješiti pomoću kriterija za postojanje limesa preko lijevog i desnog limesa (vidi poglavlje 5: KRITERIJ ZA POSTOJANJE LIMESA), iz čega lako slijedi zaključak:

funkcija $f(x)$ je **diferencijabilna** (**derivabilna**) **u točki** $x = a$ ako postoje sljedeći jednostrani limesi i jednaki su:

☞ postoji (takozvana **lijeva derivacija**)

$$f'_-(a) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

☞ postoji (takozvana **desna derivacija**)

$$f'_+(a) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

☞ $f'_-(a) = f'_+(a)$.

Obratom po kontrtapoziciji prethodne tvrdnje odnosno korištenjem KRITERIJA ZA **NE POSTOJANJE** LIMESA iz poglavlja 6 dobivamo sljedeći zaključak:

funkcija $f(x)$ je **NIJE diferencijabilna** (**derivabilna**) **u točki** $x = a$ ako $f'_-(a)$ ne postoji ili $f'_+(a)$ ne postoji ili $f'_-(a) \neq f'_+(a)$.

6.18 Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x) = x|x-3|$ u točki $x = 3$. Primijetimo da je ova funkcija neprekinuta na cijelom $\mathbb{R}$.

Rješenje Računamo lijevu i desnu derivaciju ove funkcije u točki $x = 3$ (lako se izračuna da je $f(3+h) = |h| \cdot (3+h)$ i $f(3) = 0$ te je $|h| = -h$ za $h < 0$ i $|h| = h$ za $h > 0$):

$$f'_-(3) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\cdot(3+h)}{h} = $$
$$= -\lim_{h\to 0^-} \frac{h\cdot(3+h)}{h} = -\lim_{h\to 0^-}(3+h) = -3,$$

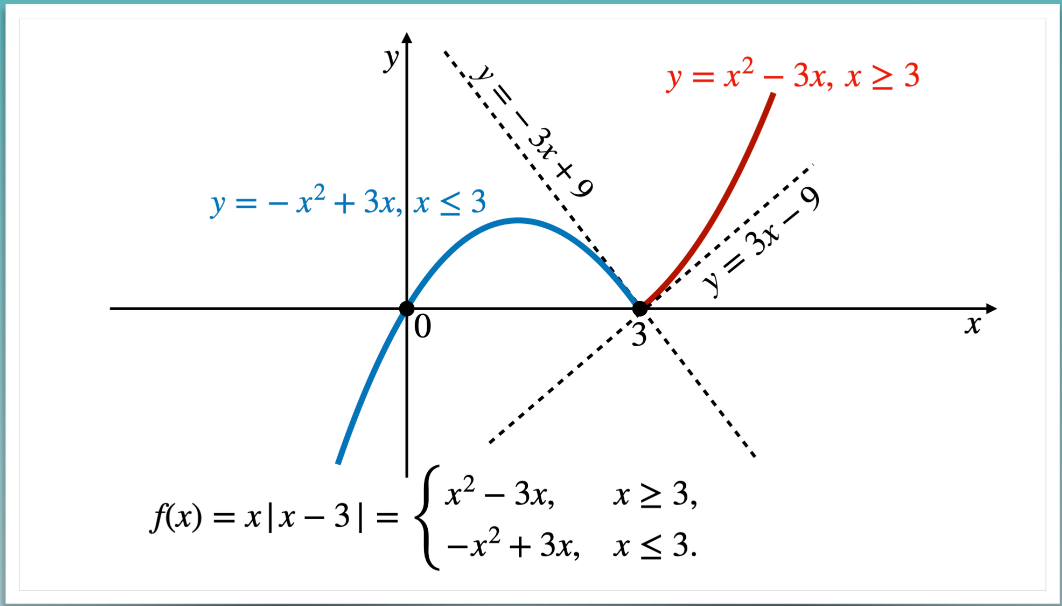
$$f'_+(3) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|\cdot(3+h)}{h} = $$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h\cdot(3+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}(3+h) = 3,$$

iz čega slijede da lijeva i desna derivacija ove funkcije u točki $x = 3$ postoji ALI su različite pa prema kriteriju ova funkcija **NIJE diferencijabilna u** $x = 3$. ✓

Ovaj zadatak pokazuje da neprekinuta funkcija može imati točku u kojoj nema derivaciju. U geometrijskom smislu ova funkcija u $x = 3$ ima šiljak. Naime $f(x) = x|x-3|$ se može ekvivalentno zadati i na sljedeći način:

$$f(x) = x|x-3| = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 3, \\ -x^2 + 3x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Znači s obadvije strane točke $x = 3$ imamo dvije različite parabole, lijeva je okrenuta ka dolje a desna ka gore, što rezultira da ova funkcija ima šiljak u $x = 3$ odnosno nema derivaciju u ovoj točki, kao na slici:



6.19 Pokazati da je funkcije $f(x) = x|x|$ diferencijabilna u točki $x = 0$. Primijetimo da je i ova funkcija neprekinuta na cijelom $\mathbb{R}$ (graf ove funkcije je dosta sličan grafu od $f(x) = x^3$ 😵‍💫).

Rješenje Računamo lijevu i desnu derivaciju ove funkcije u točki $x = 0$:

$$f'_-(0) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h \cdot |h|}{h} = -h = 0\,,$$

$$f'_+(0) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \cdot |h|}{h} = h = 0\,.$$

Budući da lijeva i desna derivacija ove funkcije postoje u $x = 0$ i $f'_-(0) = f'_+(0)$ po kriteriju s prethodne strane slijedi da je ova funkcija **diferencijabilna u $x = 0$**. Geometrijski to znači da ova funkcija nema šiljak u $x = 0$. ❒

U **Zadatku 6.19** smo vidjeli primjer funkcije koja je neprekinuta ali nije diferencijabilna u nekoj točki odnosno **neprekidnost općenito ne povlači diferencijabilnosti**. Međutim sad ćemo pokazati da **diferencijabilnost uvijek povlači neprekidnost**.

Teorem. *Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u $x = a \in D(f)$, onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Znamo da iz definicije diferencijabilnosti slijedi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\,.$$

Isto tako smo u **točki 5.3** pokazali da neprekidnost funkcije u nekoj točki njene domene znači da ona ima limes u toj točki koji je jednak njenoj vrijednosti u toj točki. To znači da bi smo pokazali da je $f(x)$ neprekidna u $x=a$ dovoljno je pokazati

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ odnosno } \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

Zaista, iz gornje pretpostavke o diferencijabilnosti i malo nešto algebre slijedi:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0\,.\ ❑$$

Obrat po kontrapoziciji isto vrijedi:

Teorem. *Ako je funkcija $f(x)$ prekidna u točki $x=a\in D(f)$, tada ona nije diferencijabilna u toj točki .*

OPREZ! Lijevu i desnu derivaciju treba raditi po definiciji a ne računski, jer možemo doći do krivog zaključka. O tome govori sljedeći zadatak.

6.20 Za koje vrijednosti paramatra $a\in\mathbb{R}$, funkcija $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ ax, & x>1,\end{cases}$ je diferencijabilna u $x=1$?

Pogrešno:

$\Longrightarrow\ f'(x)=\begin{cases}2x, & x<1,\\ a, & x>1,\end{cases}\ \Longrightarrow f'(1^-)=2$ i $f'(1^+)=a\Longrightarrow$ $a=2$. 👎 Pogreška je napravljena kod lijeve i desne derivacije, jer ih je trebalo raditi po definiciji, kao dolje. Primijetimo da za $a=2$ **ova funkcija je prekidna u $x=1$** jer vrijedi: $f(1^-)=1\neq 2=f(1^+)$. A na ovoj stranici smo pokazali da **prekidna funkcija u $x=a$ nije diferencijabilna u $x=a$**. ❐

Točno: jednostrane derivacije po definiciji:

$$f'_-(1):=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=2\,,$$

$$f'_+(1):=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{a(1+h)-1}{h}$$

postoji samo ako je $a=1$ i tada dobivamo $f'_+(1)=1$. Prema tome, jedino za $a=1$ desna derivacija u $x=1$ postoji i tada je $f'_-(1)=2\neq 1=f'_+(1)$, i čega slijedi da ova funkcija **nije diferencijabilna u $x=1$ niti za jedan $a\in\mathbb{R}$.** ✅

6.8 Studentski i pro-fini zadaci

Na kraju ovog sedmog dijela ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak zajedno s rješenjem i postupkom neka ga **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti "pro-fine" zadatka:)

6.21 **MI 26.11.2019.–6.b)**

Pokažite da funkcije $f_1(x) = e^{3x}$ i $f_2(x) = 1 + 3\sin x$ imaju iste tangente u točki $x = 0$.

[**R: –>** VIDEO]

6.22 **JIR 24.8.2020.–4.c)**

Zadane su funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 1, \\ x, & 1 < x \le 4, \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & -1 \le x \le 3, \\ 4 - x, & 3 < x \le 4. \end{cases}$$

Neka su $h_1(x) = f(g(x))$ i $h_2(x) = g(f(x))$. Odrediti $h_1'(2)$ i $h_2'(1)$. [**R: –>** VIDEO]

6.23 Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \quad \text{vrijedi: } f'(x) \neq 0, \ \forall x \in D(f).$$

[**R:** $D(f) = \langle 0, e\rangle \cup \langle e, \infty\rangle$ i $f'(x) = -\dfrac{1}{x \cdot (\ln^2 x + 1)} \neq 0$.]

6.24 Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x} \quad \text{vrijedi: } f'(x) > 0, \ \forall x > 1.$$

[**R:** $D(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$,

$$f'(x) = \frac{4x + 2}{(x^2 + x - 2)\cdot(x^2 + x)}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{+}{+\cdot+} > 0 \ \text{ za } f'(x) > 0, \ \forall x > 1]$$

6.25 Pokazati da postoji funkcija $f(x)$ i točka $x = a$ takvi da vrijedi: $f_+'(a) \neq f'(a^+)$ odnosno

$$f_+'(a) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq \lim_{x\to a^+} f'(x) =: f'(a^+).$$

[**R:** $f(x) = x^2, \ x \le 1$ i $f(x) = 2x, \ x > 1$ i $x = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_+'(1) = \infty$ i $f'(1^+) = 2$.]

6.26 Po odefiniciji derivacije izračunati $f'(x)$ za funkciju $f(x) = e^{ax^2+b}$ gdje su a, b proizvoljno zadani realni brojevi td. je $a \neq 0$.

[**R:** račun $f(x) = e^{ax^2+b} \implies f'(x) = 2axe^{ax^2+b}$; sada po definicije derivacije ovo i dokazujemo:

$$\frac{df}{dx} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a(x+h)^2+b} - e^{ax^2+b}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax^2+2axh+ah^2+b} - e^{ax^2+b}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} e^{ax^2+b} \cdot \frac{e^{2axh+ah^2} - 1}{h} = e^{ax^2+b} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{2axh+ah^2} - 1}{h} =$$
$$= e^{ax^2+b} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{2axh+ah^2} - 1}{2axh + ah^2} \cdot \frac{2axh + ah^2}{h} =$$
$$= e^{ax^2+b} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} =$$
$$= e^{ax^2+b} \cdot 1 \cdot \lim_{h\to 0} (2ax + ah) = 2axe^{ax^2+b}.$$]

6.27 Pomoću formule za derivaciju inverzne funkcije izračunati derivaciju od $f^{-1}(x)$ za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

[**R:** formula je $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$;

račun $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \implies \frac{df}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}$ pa imamo da je:

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = -2\sqrt{(x+2)^3}. \; (*)$$

Sad je potrebno eleminirati varijablu x pomoću varijable $y$na desnoj strani prethodne jednakosti. Iz $f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ slijedi da je $\sqrt{x+2} = \frac{1}{y}$ pa kad ovo uvrstimo u (*) konačno dobivamo da je

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^3} \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{-2}{x^3}.$$]

6.9 POPULARNA TEORIJSKA PITANJA NA ISPITIMA IZ SEDMOG DIJELA GRADIVA

• Po definiciji izvesti derivacije elementarnih funkcija ili nešto složenijih funkcija; na primjer, po definiciji pokazati da je $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$– sve isto kao kad smo po definiciji pokazali da je $(e^x)' = e^x$;

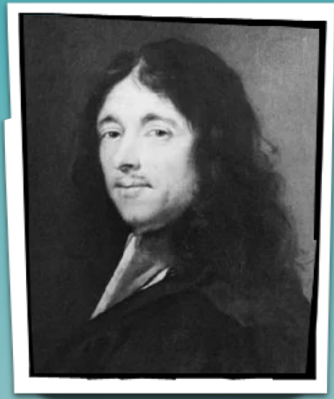
• Dokazati formulu za derivaciju inverzne funkcije – vidi **točku 6.6** ;

• Dokazati jednu od formula iz derivacije algebarskih operacija, takozvana svojstva derivacije – vidi **točku 6.2** ;

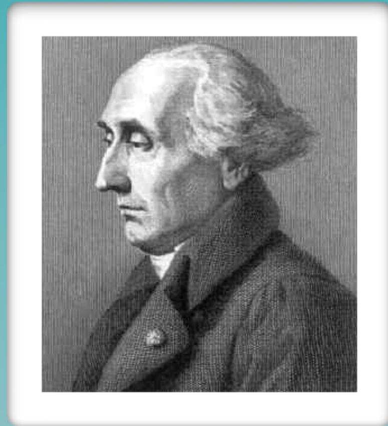
• Dokazati da diferencijabilnost povlači neprekidnost te da obrat ne vrijedi – vidi **točku 6.7** .

SEDMI DIO

DIFERENCIJALNI RAČUN:



Michel Rolle



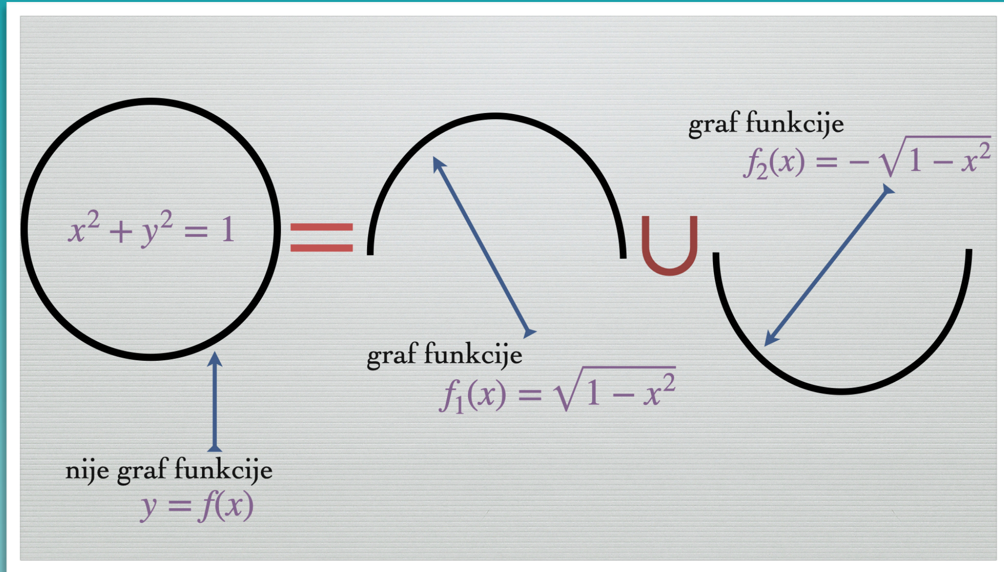
Joseph-Louis Lagrange

7.1 Derivacije razno zadanih funkcija

U 6. dijelu gradiva smo derivirali funkcije koje su uvijek bile zadane samo u jednom obliku, u takozvanom **eksplicitnom obliku** $y = f(x)$. To znači da smo na lijevoj strani imali samo varijablu y dok na desnoj strani sve ostalo ovisno samo o varijabli x. Na taj način su neovisna varijabla x i zavisna varijabla y bile razdvojene, te je varijabla y bila u privilegiranom položaju u odnosu na varijablu x.

U **implicitnom obliku** $F(x,y) = 0$ obadvije varijable x i y su u sličnoj situaciji iz koje uglavnom ne možemo eksplicitno izraziti y u ovisnosti o varijabli x. Na primjer, funkcija $y = y(x)$ koja je implicitno zadana jednadžbom $y^3 - 2y = e^x - x$ tj. $F(x,y) := y^3 - 2y - e^x + x = 0$ se NE može eksplicitno riješiti odnosno eksplicitno zadati. U geometrijskom smislu to znači da njen graf NIJE graf (eksplicitne) funkcije jedne varijable nego je to jedna **ravninska krivulja**. Na primjer, jedinična kružnica $x^2 + y^2 = 1$ je krivulja u ravnini te nije graf niti jedne funkcije. Istina, jedinična kružnica se može prikazati kao unija gornje i donje polukružnice koje jesu grafovi redom funkcija:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1,1] \text{ i } f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1,1].$$



Međutim, funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom $y - x^2 = 0$ se lako može eksplicitno riješiti $y = x^2$. Štoviše, svaka eksplicitno zadana funkcija $y = f(x)$ se može zadati i implicitno jednadžbom $F(x,y) := y - f(x) = 0$. Prema tome:

eksplicitno $\Longrightarrow$ **implicitno** ALI **obrat uvijek ne vrijedi!**

U **parametarskom obliku** obadvije varijable x i y su funkcije jedne treće varijable $t \in I$, gdje je interval I omeđen ili neomeđen, zatvoren ili otvoren, dok ovisnost x i y o varijabli t, koja često igra ulogu vremena, se zapisuje:

$$x = x(t), y = y(t), t \in I \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

Neke funkcije $y = y(x)$ koje su zadane implicitnom jednadžbom $F(x, y) = 0$, poput jedinične kružnice se mogu zapisati i u parametarskom obliku:

$$x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nažalost postoje funkcije, koje su parametarski zadane ali se ne mogu izraziti niti eksplicitno niti implicitno, kao što je to cikloida: $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$. Međutim, funkcija $y = x^2$ se lako može zadati parametarski: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Štoviše, svaka eksplicitno zadana funkcija $y = f(x)$ se može lako zadati (i to na više različitih načina) parametarski: $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$, $t \in I \subseteq D(f)$. Prema tome:

eksplicitno $\Longrightarrow$ **parametarski** NO **obrat uvijek ne vrijedi!**

Naš zadatak je: **ne ovisno o obliku zadavanja funkcije** $y = y(x)$ **izračunati njene derivacije** $y'(x)$**,** $y''(x)$,……

7.1.1 Derivacija Implicitno zadane funkcije

U Matematičkoj analizi 2 ćemo pokazati formulu za derivaciju funkcija $y = y(x)$ koja je zadana implicitnom jednadžbom $F(x, y(x)) = 0$ pomoću takozvanih parcijalnih derivacija funkcije $F(x, y)$. Izvod ove formule se temelji na direktnom deriviranju po varijabli x pripadne jednakosti $F(x, y(x)) = 0$ kao na primjer:

$$y = y(x) \text{ i } x^2 + y^2 = 1 \,\Big|\, \frac{d}{dx} \Longrightarrow 2x + 2yy' = 0 \Longrightarrow$$

$$y' = -\frac{x}{y} \text{ za sve } x \text{ t.d. je } y(x) \neq 0 \Longrightarrow y'(-1,2) = \frac{1}{2}.$$

Ovaj postupak je **generalizacija uobičajenog postupka za deriviranje eksplicitno zadanih funkcija** $y = f(x)$. Da bi to pokazali prvo ćemo prikazati funkciju $y = f(x)$ u implicitnom obliku, pa zatim ponoviti gornji postupak i na kraju dobiti rezultat koji je isti kao da smo odmah derivirali ovu funkciju odnosno $y' = f'(x)$:

$$y = f(x) \Longrightarrow y - f(x) = 0 \,\Big|\, \frac{d}{dx} \Longrightarrow$$

$$y' - f'(x) = 0 \Longrightarrow y' = f'(x).$$

7.1 Izračunati $y'(1{,}0)$ i $y''(1{,}0)$ za funkciju $y = y(x)$ koja je implicitno zadana jednadžbom:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Rješenje:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2yy').$$

Sada: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = 0 \,\Big|\, \frac{d}{dx} \implies$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2} - \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = 0 \implies y'x - y - x - yy' = 0 \implies$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \implies y'(1{,}0) = 1.$$

Budući da je $y''(x) = (y'(x))'$ iz prethodne jednakosti slijedi:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \implies$$

$$y''(1{,}0) = 2\cdot 1 - 1\cdot(1-1) = 2.$$ ✅

7.2 **MI 30.11.2015.–6.b)** Neka je funkcija $y = y(x)$ zadana implicitno s $e^{x^2} - x^2 y + 2\ln y = 1$. Odredite **tangentu** na graf funkcije $y = y(x)$ u točki $T_0(0,1)$. [**R:** $y = 1$; **–> VIDEO** ▶]

7.3 **MI 28.11.2017.–6.b)** Na funkciju $y = y(x)$ koja je zadana implicitno s $x^2 - xy + y^2 = 16$ odrediti **normalu** u točki $T(4,4)$.

[**R:** $y = x$; **–> VIDEO** ▶]

7.4 **JIR 2016.–4).** Iz točke $T(-2,0)$ postaviti **strogo rastuću tangentu** na elipsu $2x^2 + y^2 = 1$. Napomena: **točka nije na elipsi**.

[**R:** $y = \sqrt{\frac{2}{7}}(x+2)$; **–> VIDEO** ▶]

Primijetimo da je u **zadatku 7.4** originalno rješenje za tangentu je $y - \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)$. No nakon legalnog sređivanja dobija se jednostavnija forma kao gore u rješenju:)

7.1.2 Derivacija Parametarski zadane funkcije

U prvom dijelu Matematičke analize 2 ćemo se intezivnije igrati sa skalarnim i vektorskim krivuljama Γ, u ravnini ili prostoru, što se temelji na njihovoj parametrizaciji $(x(t), y(t))$ ili $(x(t), y(t), z(t))$. Do tada, a to je sada, ćemo samo računati derivacije funkcija $y = y(x)$ koje su zadane ovakvim parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$.

U tu svrhu koristimo jednostavan princip:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{\frac{dx}{dt}\cdot dt}\big(y(x)\big) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\big(y'(x)\big) = \frac{d}{\frac{dx}{dt}\cdot dt}\big(y'(x)\big) = \frac{1}{\dot{x}(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right).$$

Kao što vidimo, funkcije $y(x)$ i $y'(x)$ trebamo derivirati po varijabli x. No budući da ne znamo kako one izgledaju po ovoj varijabli nego po varijabli t to moramo dodati i pokratiti dt da bi ove funkcije izderivirali po varijabli t.

Isto tako da bi se olakšalo zapisivanje prethodnih formula, korištena je dosta popularna oznaka za derivaciju funkcije koja ovisi o vremenskoj varijabli $t \in \mathbb{R}$:

$$z = z(t) \implies \dot{z}(t) := \frac{dz}{dt}.$$

Pri tome $\frac{d}{dx}$ je općenito različito od $\frac{d}{dt}$.

7.5 Za $y = y(x)$ koja je parametarski zadana s $x = x(t)$, $y = y(t)$ te bilo koji $n \in \mathbb{N}$ pokazati da vrijedi:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ili u drugoj notaciji:

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t)}\cdot\frac{d}{dt}\big(y^{(n-1)}(x)\big).$$ **[R: –> VIDEO ▶]**

7.6 Izračunati $y'(x)$, $y''(x)$ i $y'''(x)$ u točki za koju je $t = 1$ za funkciju $y = y(x)$ koja je parametarski zadana:

$$x(t) = t^2 - \ln(t^2+1) \quad \text{i} \quad y(t) = t + \operatorname{arctg}\frac{1}{t}.$$

Rješenje:

$$\dot{x}(t) = 2t - \frac{2t}{t^2+1} = \frac{2t^3}{t^2+1} \quad \text{i}$$

$$\dot{y}(t) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{-1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}.$$

Zbog toga je: $y'(x) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \dfrac{1}{2t}$. Sada kada znamo $y'(x)$ lako ćemo pronaći $y''(x)$ i $y'''(x)$, koristeći formulu iz **Zadatka 7.5** :

$$y''(x) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{d}{dt}(y'(x)) = \frac{t^2+1}{2t^3} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right) = -\frac{t^2+1}{4t^5} = = -\frac{1}{4t^3} - \frac{1}{4t^5},$$

$$y'''(x) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{d}{dt}(y''(x)) = \frac{t^2+1}{2t^3} \cdot \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4t^3} - \frac{1}{4t^5}\right) = = \frac{t^2+1}{2t^3} \cdot \left(\frac{3}{4t^4} + \frac{5}{4t^6}\right).$$

Sada nakon uvrštavanja parametra $t = 1$ dolazimo do traženih rezultata:

$$y'(t=1) = \frac{1}{2}, y''(t=1) = -\frac{1}{2} \text{ i } y''(t=1) = 2 .$$ ❐

7.7 Napisati jednadžbu tangente u točki $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ kružnice $x^2 + y^2 = 4$ koristeći obadva načina prikaza ove kružnice: implicitno i parametarski. Odnosno pokazat ćemo da jednadžba tangente ne ovisi o načinu na koji je zadana funkcija $y = y(x)$. 👍 [**R:** $y = -x + 2\sqrt{2}$ **;**

1.način:–> VIDEO▶️, **2.način:–>** VIDEO▶️]

7.8 **MI 8.11.2004.** Izračunati $y'(x)$ i $y''(x)$ za funkciju $y = y(x)$ parametarski zadanu jednadžbama:

$$\begin{cases} x(t) = \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \sin t, \\ y(t) = \sin t + \cos t\,. \end{cases}$$

[**R:** $y'(x) = \operatorname{tg}(t),\ y''(x) = \dfrac{\sin t}{\cos^3 t\,(\cos t - \sin t)}$

–> VIDEO▶️]

Na početku Matematičke analize 2 će se dosta raditi s skalarnim i vektorskim krivuljama a posebno s njihovim parametrizacijama, što su ustvari parametarske jednadžbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ ili $z = z(t)$ zapisane u obliku $(x(t), y(t))$ ili $(x(t), y(t), z(t))$.

7.2 Osnovni teoremi diferencijalnog računa: Fermat, Rolle i Lagrange poput 3 tenora

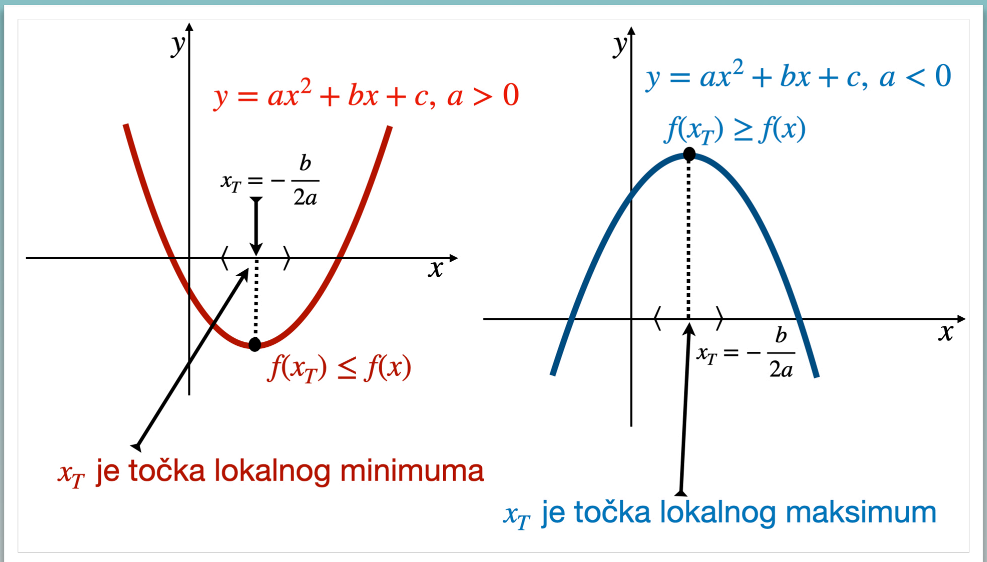
Definicija. Kažemo da funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima **lokalni ekstrem** u točki $x_0 \in D(f)$ ako $f(x)$ **u x_0 poprima lokalno najmanju vrijednost** - **lokalni minimum**:

$f(x) \geq f(x_0)$ za sve $x \in D(f) \cap \langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$ i neki $\varepsilon > 0$

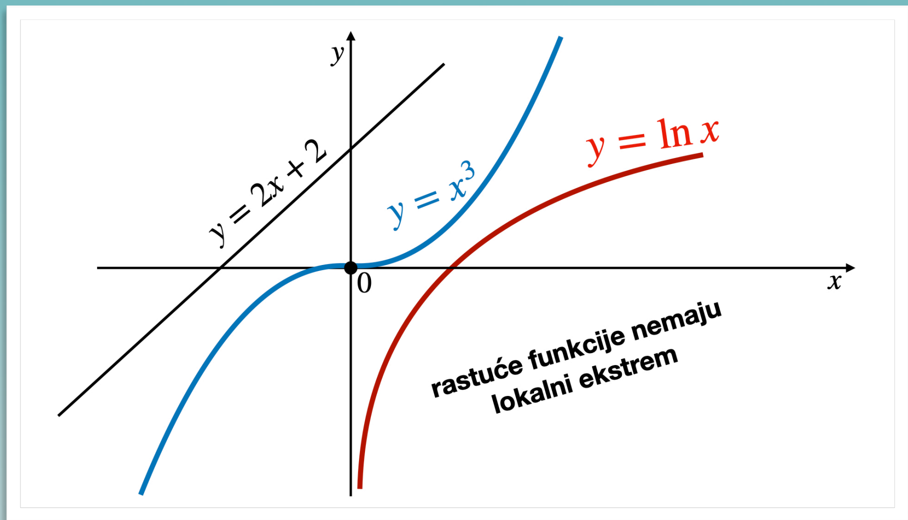
ili **lokalno najveću vrijednost - lokalni maksimum**:

$f(x) \leq f(x_0)$ za sve $x \in D(f) \cap \langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$ i neki $\varepsilon > 0$.

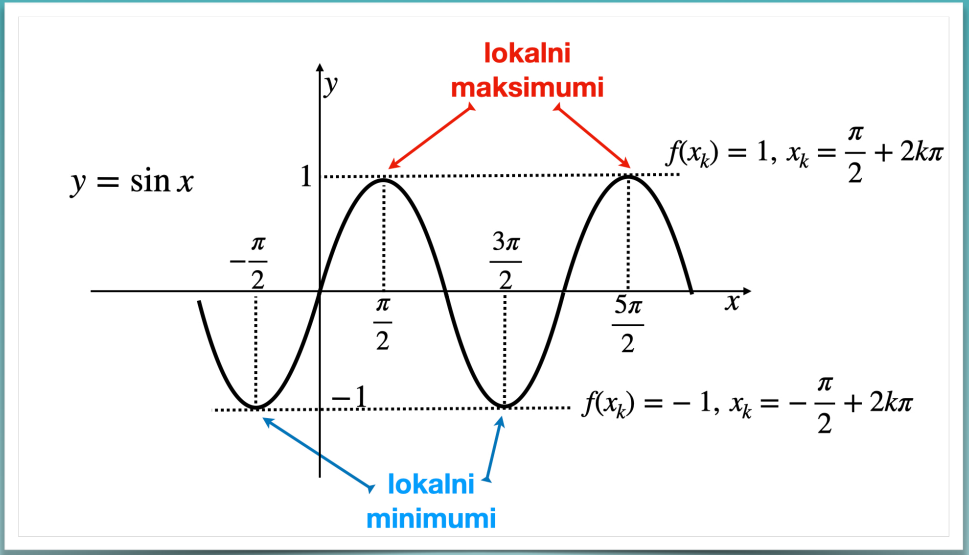
Još se kratko kaže da je x_0 **točka lokalnog ekstrema funkcije** $f(x)$. Prefiks "lokalno" dolazi od toga što smo oko x_0 uzeli lokalnu ε - okolinu odnosno otvoreni interval $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$ a ne cijelu domenu od $f(x)$. ❐



Nije teško iz prethodne definicije pokazati da **strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija $f(x)$ ne može imati lokalni ekstrem**. Na primjer, za strogo rastuću funkciju i za sve $x_1 < x_2 \in D(f)$ je $f(x_1) < f(x_2)$, što specijalno za neki $x_0 \in D(f)$ povlači da je: $f(x_0-\varepsilon) < f(x_0) < f(x_0+\varepsilon)$ odnosno x_0 nije lokalni ekstrem. Zbog toga funkcije $f(x) = e^{ax}$, $f(x) = ax + b, f(x) = ax^3$ i tako dalje, nemaju lokalne ekstreme jer su strogo monotone na $D(f)$.



S druge strane, **periodička funkcija može imati beskonačno mnogo lokalnih ekstrema**. Na primjer, $f(x) = \sin x$ u točkama $x_k = \pi/2 + 2k\pi$ ima lokalni maksimum, dok u točkama $x_k = -\pi/2 + 2k\pi$ ima lokalni minimum.



Na dalje, iz definicije vidimo da **lokalni ekstrem neke funkcije ne možemo računati** jer se ovaj pojam temelji na usporedbama "≤" i "≥" između $f(x)$ i $f(x_0)$ za neprebrojivo mnogo x iz neke ε - okoline oko točke x_0. Kako onda pronaći lokalne ekstreme funkcije $f(x)$ kad nam njihova definicija ne daje nikakvu računsku podlogu? Odgovor je: stacionarne točke i Fermat, Rolle i Lagrange (3 tenora).👍 (jedna dobra pjesma od 3 tenora: Paveroti, Carreras, Domingo **Three Tenors**)

Definicija. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna u $x_0 \in D(f)$. Ako je $f'(x_0) = 0$ tada se x_0 zove **stacionarna točka** funkcije $f(x)$. ❐

Za razliku od lokalnog ekstrema stacionarna točka je računski pojam odnosno **stacionarne točke možemo lako pronaći računskim postupkom** u dva koraka:

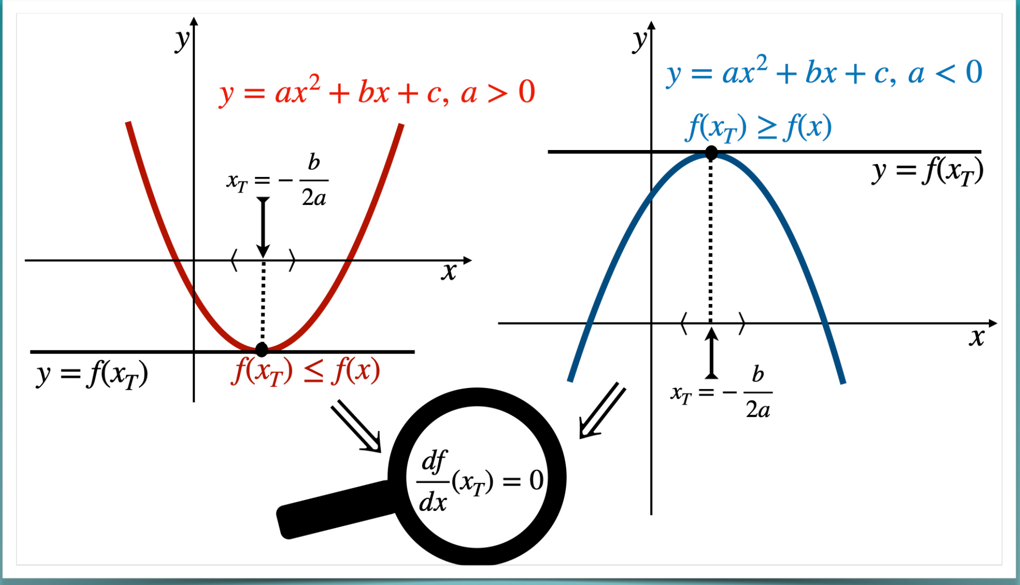
1. izračunati $f'(x)$;
2. riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$.

Kao što vidimo stacionarne točke od $f(x)$ su nul-točke prve derivacije od $f(x)$ odnosno od $f'(x)$:) Koja je korist od računanja stacionarnih točaka te koja je veza između njih s jedne strane i lokalnih ekstrema s druge strane ćemo pokazati u nastavku. Od velike važnosti su i posljedice od 3 teorema: Fermat, Rolle i Lagrange

7.2.1 Fermat - lokalni ekstremi i stacionarne točke funkcije

Teorem. (Fermat) Neka je $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i $x_0 \in \langle A, B\rangle$ točka lokalnog minimuma ili lokalnog maksimuma od $f(x)$. Tada je x_0 stacionarna točka od $f(x)$ odnosno $f'(x_0) = 0$. [**R**: dokaz - remix predavanja iz 2020 –> **VIDEO**▶️]

Najjednostavnija model-funkcija za ovu vezu među lokalnim ekstremima i stacionarnim točkama je kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, koja u tjemenu x_T poprima lokalni maksimum ili minimum ovisno o predznaku koeficijenta a, te u svima njima je derivacija jednaka nuli - vidi sliku desno gore, što povlači da je koeficijent tangente u ovim točkama jednak nuli. ⤴️



Geometrijski to znači da u točki gdje graf funkcije postiže lokalni ekstrem se funkcija "odmara" jer je u toj točki tangenta paralelna s $x-$osi.

Glavna posljedica Fermatovog teorema se ogleda u njegovoj interpretaciji: **lokalne ekstreme funkcije tražimo među stacionarnim točkama funkcije**. Ovo je važno jer lokalni ekstrem po definiciji nije računski pojam za razliku od stacionarne točke koja jest, pa zbog toga prvo računamo stacionarne točke funkcije, a tek potom među njima radimo selekciju tko je tko: lokalni minimum, lokalni maksimum ili nije lokalni ekstrem (prevojna točka)?

7.9 [**dio Zadatka 2.b) ZI - 24.1.2022.**] *Izračunati sve stacionarne točke funkcije* $f(x) = x\ln^2 x$.

Rješenje. Primijetimo da stacionarne funkcije trebaju biti u njenoj domeni, pa zbog toga prvo treba napisati domenu ove funkcije da se nebi zaboravili:) $D(f) = \langle 0,\infty\rangle$. Sada računamo:

$$f(x) = x\ln^2 x \implies f'(x) = \ln^2 x + 2x\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2),$$

$$f'(x) = 0 \implies \ln x(\ln x + 2) = 0 \implies \ln x = 0 \text{ ili } \ln x = -2,$$

odnosno $x = 1 \in D(f)$ i $x = e^{-2} \in D(f)$ su stacionarne točke ove funkcije. Q.E.D.

7.10 **ZIR 7.2.2022.–6.a)** Diskusija na temu koliko je važno izračunati stacionarne točke u zadatku s globalnim ekstremima. *Odredite globalne ekstreme i sliku funkcije* $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ *zadane formulom* $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$.
[**R:** stacionarne točke su $x = 0$ i $x = 3$, ali $x = 0$ otpada jer nije u intervalu $[1,4]$**;** detalji na **–>** **VIDEO**]

7.11 [**dio Zadatka 6 - JIR - 29.8.2022.**] *Odredite sve stacionarne točke funkcije*

$$f(x) = \operatorname{th}\frac{x^2}{x-2} .$$

[**R:** stacionarne točke su $x = 0 \in D(f)$ i $x = 4 \in D(f)$; detalji na **–>** **VIDEO**]

7.12 [**dio Zadatka 2 - ZI - 1.2.2021.**] *Odredite sve stacionarne točke funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln x} .$$

[**R:** nema stacionarnih točaka jer je $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in D(f)$; detalji na **–>** **VIDEO**]

7.13 **ZI 24.1.2022.–1.(a)** Diskusija na temu o čemu treba voditi računa kod iskaza nekog teorema. *Iskažite Fermatov teorem za* $y = f(x)$ *na* $\langle a, b\rangle$.
[**R: –>** **VIDEO**]

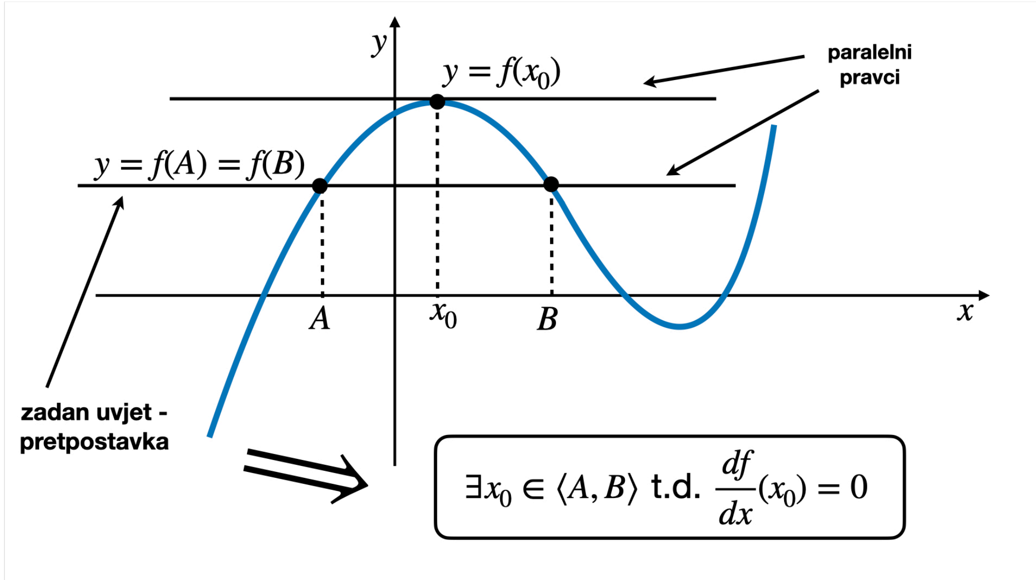
7.2.2 Rolle - nul-točke funkcije i derivacije

Teorem. (Rolle) Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekinuta na zatvorenom intervalu $[A,B]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu $\langle A,B\rangle$. Ako je $f(A)=f(B)$ tada postoji $x_0\in\langle A,B\rangle$ takva da je $f'(x_0)=0$.

Dokaz Rolleovog teorema se bazira na Fermatovom teoremu iz **7.2.1**. Specijalno ako je $f(A)=f(B)=0$ tada Rolleov teorem kaže da **između dvije nultočke** ovakve funkcije **postoji stacionarna točka** te funkcije ili **između dvije nultočke** ovakve funkcije **postoji nultočka njene derivacije,** vidi sliku desno. Geometrijsko značenje Rolleovog teorema kaže: prvo povučemo pravac kroz dvije točke $(A,f(A))$ i $(B,f(B))$; iz uvjeta $f(A)=f(B)$ dobivamo horizontalan pravac; tada postoji točka $x_0\in\langle A,B\rangle$ u kojoj je tangenta isto horizontalan pravac ☞

7.14 Pronaći interval $[A,B]$ i točku $x_0\in\langle A,B\rangle$ za funkciju $f(x)=x^2+3x-4$ takve da vrijedi Rolleov teorem.

Rješenje. Ova kvadratna funkcija je neprekidna i diferencijabilna na cijelom $\mathbb{R}$ pa je specijalno neprekidna na $[A,B]$ i diferencijabilna na $\langle A,B\rangle$ sa sve $A,B\in\mathbb{R}$. Najjednostavnije je uzeti nultočke $A=-4$ i $B=1$ jer je tada lako ispunjen uvjet $f(A)=f(B)\ (=0)$. Nađimo stacionarnu točku: $f'(x)=2x+3=0 \implies x_0=-3/2\in\langle -4,1\rangle$. Prema tome rješenje je: $[A,B]=[-4,1]$ i $x_0=x_0=-3/2$. **Q.E.D.**



7.15 **ZI 3.2.2020.–1.a)** Odredite interval $[a,b]$ i točku $c\in\langle a,b\rangle$ takvu da za funkciju $f(x)=\mathrm{sh}^2(x)$ vrijedi Rolleov teorem. [**R: –>** **VIDEO**▶️]

7.15^{bis} Pokažimo kako se zadatak tipa kao **zadatak 7.15** može riješiti bez ikakvog crtanja ili poznavanja grafa zadane funkcije. *Za funkciju*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

odrediti interval $[a, b]$ *i točku* $c \in \langle a, b \rangle$ *takve da vrijedi Fermatov teorem srednje vrijednosti.*

Rješenje. Budući da je funkcija parna jer je $f(-x) = f(x)$ to znači je uvjet $f(a) = f(b)$ ispunjen za bilo koji par točaka $x = -b$ i $x = b$ za $b > 0$. Na primjer, za interval $[-2,2]$ vrijedi $f(-2) = f(2)$. Sada pronađimo računski ali ne grafički stacionarne točke ove funkcije:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \implies c = 0\,.$$

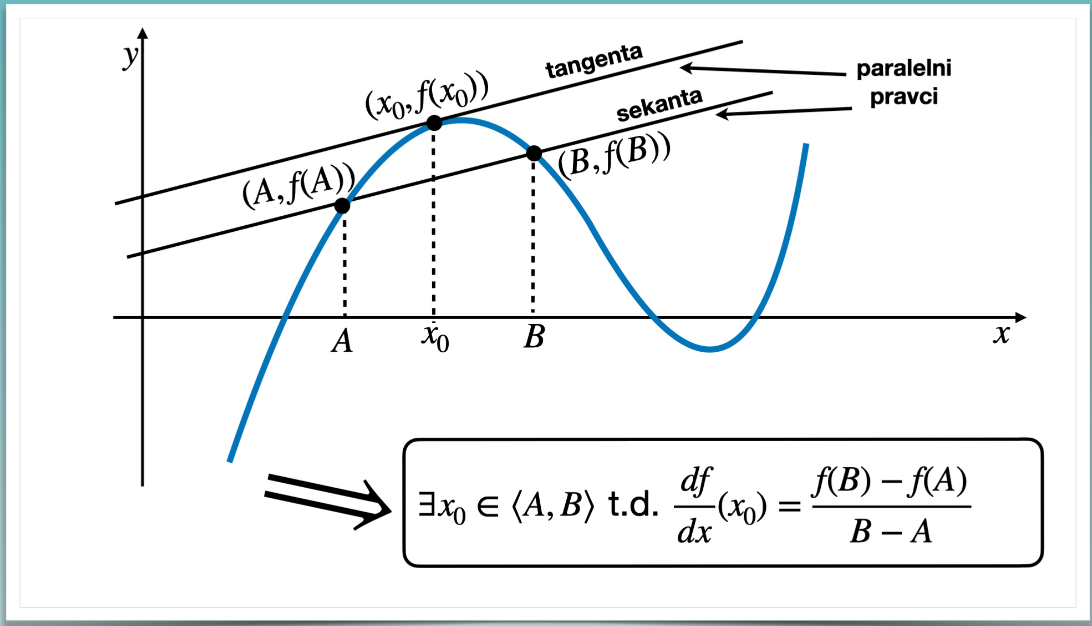
Budući da je $0 \in \langle -2,2 \rangle$ to smo našli sve potrebno što se pretpostavlja i zaključuje u Rolleovom teoremu: $f(-2) = f(2)$, $0 \in \langle -2,2 \rangle$ i $f'(0) = 0$. **Q.E.D.**

7.2.3 LagRangeov teoRem sRednje vRijednosti i posljedice na monotonost funkcije

Teorem. (Lagrange) Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $\langle A,B\rangle$. Tada postoji $x_0\in\langle A,B\rangle$ takva da je $f'(x_0)=\dfrac{f(B)-f(A)}{B-A}$.

Fermat $\Longrightarrow$ Rollea $\Longrightarrow$ Lagrangea $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ posljedice Lagrangea
odnosno:
Fermat se koristi u dokazu Rollea!
Rolle se koristi u dokazu Lagrangea!
Lagrange se koristi u dokazu "posljedica"

Budući da razlomak na desnoj strani prethodne jednakosti je zapravo **koeficijent pravca kroz dvije točke $(A,f(A))$ i $(B,f(B))$-sekanta** a dobro znamo da je $f'(x_0)$ **koeficijent pravca tangente na $y=f(x)$ u točki $x=x_0$** to se ovaj Lagrangeov teorem još popularno zove: **kosa-generalnija verzija od Rolleovog teorema** odnosno **Rolleov teorem je horizontalna-specijalna verzija Lagrangeovog teorema**. Zašto? Geometrijski: to je očito nakon što se usporede slike koje postoje pored ova dva teorema. Analitički: ako je $f(A)=f(B)$, tada specijalno iz Lagrangea slijedi $f'(x_0)=0$, što je Rolleov teorem. OPREZ! Ovo nije dokaz Rolleovog teorema pomoću Lagrangeovog jer se upravo Lagrangeov teorem dokazuje pomoću Rolleovog teorema. Naime, u dokazu od ova 3 teorema vrijedi slijedeća hijerarhija:



Postoje dvije glavne posljedice Lagrangeovog teorema, gdje prvu od njih koristimo u diferencijalnom računu - ovaj i sljedeći dio gradiva, dok drugu koristimo u integralnom računu - kasnija poglavlja.

Korolar. (posljedica Lagrangea) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu $\langle A, B \rangle$.

(i) Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle A, B \rangle$, tada je $f(x)$ strogo rastuća na $\langle A, B \rangle$ (piše se $f(x) \nearrow$ na $\langle A, B \rangle$);

(ii) Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in \langle A, B \rangle$, tada je $f(x)$ strogo padajuća na $\langle A, B \rangle$(piše se $f(x) \searrow$ na $\langle A, B \rangle$).

U prethodnoj posljedici (korolaru) interval $\langle A, B \rangle$ **je interval monotonosti funkcije** $f(x)$, budući da $f(x)$ raste (prvi slučaj) odnosno pada (drugi slučaj) na $\langle A, B \rangle$.

Korolar. (posljedica Lagrangea) Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu $\langle A, B \rangle$.

(i) Ako je $f'(x) = 0$ za sve $x \in \langle A, B \rangle$, tada je $f(x)$ konstantna funkcija na $\langle A, B \rangle$;

(ii) Ako je $f'(x) = g'(x)$ za sve $x \in \langle A, B \rangle$, tada je $f(x) - g(x)$ konstantna funkcija na $\langle A, B \rangle$.

Zahvaljujući posljedicama Lagrangeovog teorema sada možemo proširiti **Zadatke 7.9, 7.10**, **7.11** i **7.13**.

7.16 [**dio Zadatka 2.b) - ZI - 24.1.2022.**] *Odrediti intervale monotonosti funkcije* $f(x) = x \ln^2 x$.

Rješenje. Iz **Zadatka 7.9** znamo sljedeće činjenice:

- $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$; • $f'(x) = \ln x \cdot (\ln x + 2)$;
- $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = e^{-2}$ i $x = 1$.

Sada trebamo po veličini rasporediti stacionarne točke unutar domene $\langle 0, \infty \rangle$. Tvrdimo da su $\langle 0, e^{-2} \rangle$, $\langle e^{-2}, 1 \rangle$ i $\langle 1, \infty \rangle$ intervali monotonosti ove funkcije. Zaista:

- $f'(x) = (-) \cdot (-) > 0$ za sve $x \in \langle 0, e^{-2} \rangle$,
- $f'(x) = (-) \cdot (+) < 0$ za sve $x \in \langle e^{-2}, 1 \rangle$,
- $f'(x) = (+) \cdot (+) > 0$ za sve $x \in \langle 1, \infty \rangle$.

Primjenom Lagrangeove posljedice sada zaključujemo:

- $f(x)$ strogo raste na intervalu $\langle 0, e^{-2} \rangle$,
- $f(x)$ strogo pada na intervalu $\langle e^{-2}, 1 \rangle$,
- $f(x)$ strogo raste na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$. **Q.E.D.**

7.17 [**dio Zadatka 6.a)** - **ZIR 7.2.2022.**] *Odrediti intervale monotonosti funkcije* $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ *zadane formulom* $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$.

[**R:** $f(x)$ strogo raste na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$,
$f(x)$ strogo pada na intervalu $\langle 3, 4 \rangle$; **–>** **VIDEO**]

7.18 [**dio Zadatka 6 - JIR - 29.8.2022.**] *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$f(x) = \text{th}\frac{x^2}{x-2}.$$

[**R:** $f(x)$ strogo raste na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 4, \infty\rangle$;
$f(x)$ strogo pada na intervalima $\langle 0,2\rangle$ i $\langle 2,4\rangle$;
detalji na **–>** **VIDEO**]

7.19 [**dio Zadatka 2 - ZI - 1.2.2021.**] *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{1+\ln x}.$$

[**R:** $f(x)$ strogo pada na intervalima $\langle 0, e^{-1}\rangle$ i $\langle e^{-1}, \infty\rangle$;
detalji na **–>** **VIDEO**]

Za razliku od Rolleovog teorema gdje smo u **Zadacima 7.14** i **7.15** provjeravali pretpostavke i zaključak Roellovog teorema za konkretni zadanu funkciju, kod Fermatovog i Lagrangeov teorema smo se koncentrirali na njihove primjene: lokalni ekstremi i stacionarne točke te utjecaj predznaka derivacije funkcije na njenu monotonost - intervali monotonosti. Sada ćemo kao i kod Rollea za zadanu funkciju provjeravati pretpostavke i zaključke Fermatovog i Lagrangeovog teorema, naravno zasebno jedan od drugoga.

7.20 [**ZI - 24.01.2022. - 1.c)**] *Za funkciju $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0,\pi]$ odredite $c \in \langle 0,\pi\rangle$ takav da vrijedi Fermatov teorem.*

Rješenje. Treba prokazati pretpostavke i zaključak Fermatovog teorema za ovu konkretnu funkciju na konkretnom intervalu:

- (pretpostavka) budući da je $f(x) = \sin x$ diferencijabilna na cijelom $\mathbb{R}$ to je specijalno diferencijabilna i na zadanom intervalu $\langle 0,\pi\rangle$;
- (pretpostavka) s grafa od $f(x) = \sin x$ vidimo da ova funkcija ima samo jedan lokalni ekstrem na $\langle 0,\pi\rangle$ to jest lokalni maksimum u $x_0 = \pi/2$;
- (zaključak) $f'(x) = \cos x = 0$ na $\langle 0,\pi\rangle \implies f'(\pi/2) = 0$ odnosno $f'(x_0) = \pi/2$. ❑

7.21 **ZI 3.2.2020.–1.c)** Odredite interval $[a,b]$ i točku $c \in \langle a,b\rangle$ takvu da za funkciju $f(x) = x^2 - 3x + 5$ vrijedi Langrageov teorem.

[**R:** napravit ćemo dva različita izbora za interval $[a,b]$ i traženu točku **–>** **VIDEO**]

7.3 Taylorov polinom i formula

Taylorov polinom $n-$tog reda ili **$n-$ti Taylorov polinom funkcije** $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ **u okolini zadane točke** $x_0 \in \langle a,b\rangle$ označavamo s $T_n(f)(x)$ ili kraće $T_n(x)$ i definiramo kao polinom $n-$tog stupnja:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

gdje se brojevi a_k, takozvani **koeficijenti Taylorovog polinoma**, računaju po formuli:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k \in \{1,2,\ldots n\}\,.$$

Za određen broj elementarnih funkcija dobro je znati napamet njihov Taylorov polinom oko $x_0 = 0$, poput:

$f(x) = e^x,\ x_0 = 0 \implies$

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k.$$

Međutim, Taylorov polinom za $f(x) = e^{-x}$ oko $x_0 = 0$ ne moramo direktno računati po formuli nego možemo iskoristiti prethodni Taylorov polinom od funkcije $f(x) = e^x$ tako što umjesto x u njega uvrstimo $-x$:

$f(x) = e^{-x},\ x_0 = 0 \implies$

$$T_n(x) = 1 + \frac{-x}{1} + \frac{(-x)^2}{2} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}x^k\,.$$

Taylorov polinom zadane funkcije $y = f(x)$ nije sam sebi svrha i ne služi da bi se funkcija "hvalila" kako ima lijep Taylorov polinom, nego se funkcija može aproksimirati svojim polinomom. Kako je to moguće te kolika je greška ove aproksimacije nam govori sljedeća **Taylorova formula:**

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

gdje $R_n(x)$ označava takozvani **ostatak** ili **pogrešku aproksimacije** i izračunava se po formuli:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ za neki } c \in \langle x, x_0\rangle \text{ ili } c \in \langle x_0, x\rangle.$$

Budući da broj c u kome računamo $f^{n+1}(x)$ ovisi o varijabli x odnosno $c = c(x)$ **ostatak** $R_n(x)$ **nije polinom po** x premda zadrži polinomijalni dio $(x-x_0)^{n+1}$.

Primijetimo da **specijalno za $n = 0$ Taylorova formula postaje Lagrangeov teorem srednje vrijednosti**:

$$f(x) = T_0(x) + R_0(x) \implies f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

odnosno **Taylorova formula generalizira Lagrangea**.

Očito je $R_n(x_0) = 0$ i $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$ **–> ocjena greške** aproksimacije broja $f(x)$ s $T_n(x)$, gdje je x konkretan realan broj relativno blizu x_0.

Iz jednakosti $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$ slijedi da još treba ocijeniti s desne strane $|R_n(x)|$ odnosno **naći što manju konstantu $M > 0$** takvu da je

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} .$$

Naravno najpreciznije je za M uzeti

$$M = \max_{c \in I_0} |f^{(n+1)}(c)|, \text{ gdje je } I_0 = \langle x, x_0 \rangle \text{ ili } I_0 = \langle x_0, x \rangle .$$

Ako nije moguće naći maksimum od $|f^{(n+1)}(c)|$ po svim c iz intervala I_0, kao što je to slučaj u sljedeća dva zadatka, onda **uzimamo za M najbližu moguću gornju među od $|f^{(n+1)}(c)|$ na I_0**.

7.22 Odrediti Taylorov polinom $T_3(x)$ za funkciju $f(x) = e^{x^3}$ oko $x_0 = 0$ te pomoću njega aproksimirati broj $e^{1/8}$. Ocijeniti grešku ove aproksimacije.

Rješenje. Računamo **Taylorov polinom** po formuli s prethodne strane:

$$f(x) = e^{x^3} \implies f(0) = 1 \implies a_0 = f(0) = 1 ,$$

$$\implies f'(x) = 3x^2 e^{x^3} \implies f'(0) = 0 \implies a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 0 ,$$

$$\implies f''(x) = (6x + 9x^4)e^{x^3} \implies f''(0) = 0 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0$$

$$\implies f'''(x) = (6 + 54x^3 + 27x^6)e^{x^3} \implies f'''(0) = 6$$

$$\implies a_3 = \frac{f^3(0)}{3!} = \frac{6}{6} = 1.$$

Prema tome: $T_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 1 + x^3$. ♠

Aproksimacija. Broj $e^{1/8}$ možemo napisati kao

$$e^{1/8} = e^{(1/2)^3} = f(1/2) ,$$

pa zbog toga ga aproksimiramo s $T_3(1/2)$ odnosno

$$e^{1/8} = f(1/2) \approx T_3(1/2) = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} . \text{ ♣}$$

Ocjena greške. Prvo ćemo izračunati ostatak $R_3(x)$ po formuli s prethodne stranice:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \text{ za neki } c \in \langle x,0 \rangle \text{ ili } c \in \langle 0,x \rangle.$$

Kako smo već izračunali $f^{(3)}(x)$ to je onda

$$f^{(4)}(x) = (f^{(3)}(x))' = (180x^2 + 324x^5 + 81x^8)e^{x^3}$$

$$\Longrightarrow f^{(4)}(c) = (180c^2 + 324c^5 + 81c^8)e^{c^3}.$$

Sada radimo ocjenu greške za $e^{1/8} = f(1/2) \approx T_3(1/2)$:

$$|e^{1/8} - T_3(1/2)| = |f(1/2) - T_3(1/2)| = |R_3(1/2)|,$$

gdje je

$$|R_3(1/2)| = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{(180c^2 + 324c^5 + 81c^8)e^{c^3}}{2^4 \cdot 4!}$$

za neki $c \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ odnosno $0 < c < \frac{1}{2}$. Specijalno $e^{c^3} \le e$. Budući da se c nalazi samo u brojniku onda je gornji razlomak manji od sličnog gdje smo umjesto c stavili 1/2 odnosno:

$$|R_3(1/2)| = \frac{(180c^2 + 324c^5 + 81c^8)e^{c^3}}{2^4 \cdot 4!} \le$$

$$\le \frac{45e}{2^4 \cdot 4!} + \frac{81e}{2^5 \cdot 4!} + \frac{81e}{2^{12} \cdot 4!}. \quad ◉$$

7.23 Aproksimirati broj $\operatorname{arctg}(1/2)$ pomoću drugog Taylorov polinom funkciju $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ oko $x_0 = 1$. Potom ocijeniti grešku ove aproksimacije.

Rješenje. Računamo **Taylorov polinom** po formuli s prethodne strane:

- $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \Longrightarrow f(1) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow a_0 = f(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \Longrightarrow a_1 = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{1}{2}$,
- $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow f''(1) = \frac{-1}{2} \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{-1}{4}$

pa je prema tome:

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

Aproksimacija. Broj $e^{1/8}$ možemo napisati kao

$$\operatorname{arctg}(1/2) \approx T_2(1/2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{16}.$$

Ocjena greške. Prvo ćemo izračunati ostatak $R_2(x)$ po formuli s prethodne stranice:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)^3 \text{ za neki } c \in \langle x, 1 \rangle \text{ ili } c \in \langle 1, x \rangle.$$

Kako smo već izračunali $f^{(2)}(x)$ to je onda lako izračunati

$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \Longrightarrow f^{(3)}(c) = \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3}.$$

Sada imamo ocjenu greške za $\operatorname{arctg}(1/2) \approx T_2(1/2)$:

$|\operatorname{arctg}(1/2) - T_2(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| = |R_2(1/2)|$,

gdje je

$|R_2(1/2)| = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 = \frac{6c^2 - 2}{48(1+c^2)^3}$,

za neki $c \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ odnosno $\frac{1}{2} < c < 1$. Ovo nam pomaže da eliminiramo c iz $|R_2(1/2)|$:

$$|R_2(1/2)| = \frac{6c^2 - 2}{48(1+c^2)^3} < \frac{6c^2 - 2}{48} < \frac{6c^2}{48} < \frac{1}{8}, 👍$$

gdje smo koristili da se razlomak poveća ako mu se nazivnik smanji ili brojnik poveća. ❐

7.24 [**ZI - 24.01.2022. - 2.b)**] *Odrediti Taylorov polinom drugog reda* $T_2(x)$ *za funkciju* $f(x) = x\ln^2 x$ *oko* $x_0 = 1$ *te ocijeniti pogrešku aproksimacije vrijednosti funkcije* $f(x)$ *polinomom* $T_2(x)$ *u točki* $x = e$.

[**R:** $f(e) \approx T_2(e) = (e-1)^2$ jer je $T_2(x) = (x-1)^2$; najbolja moguća ocjena $|R_2(e)| \le \frac{(e-1)^3}{6e}$, ali može i grublja ocjena $|R_2(e)| \le \frac{(e-1)^3}{3}$ **–>** **VIDEO**▶.]

7.25 [**LJIR - 6.7.2020. - 5)**] *Koristeći Taylorov polinom 5. reda funkcije* $f(x) = \sin x$ *oko* $x_0 = 0$, *aproksimirajte broj* $\sin(1)$ *te ocijeniti pogrešku aproksimacije.*

[**R:** $\sin(1) \approx T_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}$; $|R_5(1)| < \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

diskusija rješenja na **–>** **VIDEO**▶]

7.26 [**MI - 29.11.2016. - 6)**] *Aproksimirajte* $\sqrt[3]{e}$ *pomoću četvrtog Taylorovog polinoma funkcije* $f(x) = e^x$ *oko* $x_0 = 0$. *Pokazati da je pogreška ove aproksimacije manja od* 10^{-4}.

[**R:** $\sqrt[3]{e} = e^{1/3} \approx T_4(1/3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} + \frac{1}{1944}$;

$$|R_4(1/3)| < \frac{1}{10000} = 10^{-4} \quad .]$$

7.4 L'Hospitalovo pravilo - računanje limesa

L'Hospitalovo pravilo je tehnika računanja limesa. Bazira se na ideji da se limes razlomka $f(x)/g(x)$ zamijeni s limesom razlomka u kome se umjesto funkcija pojavljuju njihove derivacije odnosno $f'(x)/g'(x)$ uz uvjet da ovaj zadnji limes postoji. Formalno zapisano, neka je $A = \infty$ ili $A = -\infty$ ili $A = x_0$ ili $A = x_0^-$ ili $A = x_0^+$ gdje je $x_0 \in \langle a, b\rangle$ i neka su $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne funkcije na $\langle a, x_0\rangle \cup \langle x_0, b\rangle$:

ako postoji $\lim\limits_{x\to A}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ i $\lim\limits_{x\to A}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$,

tada je $$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7.27 Sada lako možemo pokazati da vrijede limesi koje smo u 6. dijelu gradiva zvali "esencijalni limesi" :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+0} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1$;
- $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{2^x} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{2^x \ln 2} = 0$.

Sve što smo naučili o limesima u 6. dijelu gradiva (takozvani klasičan pristup) i dalje ostaje na snazi. Pogotovo tehnički kod limesa ∞/∞ s mnogo korijenja. U ovakvim slučajevima nije isplatno koristiti L'Hospitalovo pravilo, kao u sljedećem primjeru.

7.28 Pokažimo da nije dobro koristiti L'Hospitalovo pravilo u sljedećem limesu.

I. <u>način</u> (klasičan bez L'Hospitala):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1}}{3-\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = [\text{najveća potencija je } \sqrt{x}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1})/\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})/\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt[4]{1+1/x^2}}{3/\sqrt{x}-1} = -2;$$

II. <u>način</u> (L'Hospital):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1}}{3-\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+\dfrac{2x}{4\cdot\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}}{-\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} = \ldots$$

Međutim, mnogo je veći broj limesa koje ne možemo riješiti na klasičan način nego jedino pomoću L'Hospitalovog pravila, što ćemo pokazati u sljedećim točkama.

7.4.1 Neodređeni oblik $\frac{0}{0}$

7.29 Izračunati: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\operatorname{ch}^3 x}$.

I. način (**kraći**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\operatorname{ch}^3 x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{-3\operatorname{ch}^2 x\cdot\operatorname{sh}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{-3\operatorname{ch}^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x}=-1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x}=$$

$$=-1\cdot\frac{0}{0}=\overset{\text{L'H}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}=-1;$$

II. način (**duži**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\operatorname{ch}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\operatorname{ch}x)(1+\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\operatorname{ch}x}=\frac{3}{3}\cdot\frac{0}{0}=$$

$$=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}-1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x}=-1\cdot\frac{0}{0}=\overset{\text{L'H}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}=-1.$$

7.30 **Pokazati da je**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x-x^2)}{x+x^2}=2$.

[**R:** I. način (L'Hospital) **–>** **VIDEO**▶]

[**R:** II. način (klasično) **–>** **VIDEO**▶]

7.31 **Izračunati**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{sh}x}{(e^x-1)^3}=\dfrac{0}{0}$.

[**R:** $L=-\dfrac{1}{3}$ **–>** **VIDEO**▶]

7.4.2 Neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$

7.32 Izračunati: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{4^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

Rješenje: **I. način** (**s dva L'Hospitala**)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4^x\ln 4}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4^x\ln^2 4}=0;$$

II. način (**s jednim L'Hospitalom**)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2^x)^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2^x}\right)^2=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\infty}{\infty}\right)^2\overset{\text{L'H}}{=}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}\right)^2=0.$$

7.33 Izračunati: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^5(10x)}{x^5}=\frac{\infty}{\infty}$.

[**R:** $L=0$ **–>** **VIDEO**]

7.4.2 Neodređeni oblik $0\cdot\infty$

Neodređeni oblik $0\cdot\infty$ se algebarskim trikom svodi na neodređene oblike $0/0$ ili ∞/∞ ovisno koji je lakši od ova dva za razriješiti odnosno:

$$0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{0}=\frac{0}{0}\quad\text{ili}\quad 0\cdot\infty=\frac{1}{\infty}\cdot\infty=\frac{\infty}{\infty}.$$

7.34 Izračunati: $\lim_{x\to-\infty}x\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)=-\infty\cdot 0$.

Rješenje. Prvo kao u 6. dijelu gradiva trebamo supstitucijom $x\to-x$ prebaciti limes kad $x\to-\infty$ na $x\to\infty$, a potom dalje nastaviti:

$$\lim_{x\to-\infty}x\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)=-\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=-\infty\cdot 0=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1.$$

7.35 Izračunati: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1-\sin(2x)\right)\cdot\operatorname{tg}(2x)=0\cdot\infty$.

[**R:** $L=0$ **–>** **VIDEO**]

7.4.3 Neodređeni oblik $\infty-\infty$

Kao što znamo iz 6. dijela gradiva da se neodređeni oblik $\infty-\infty$ se algebarskim trikovima svodi na ∞/∞. Osim toga, ovdje ćemo $\infty-\infty$ svoditi i na $\infty\cdot 0$.

7.36 Izračunati: $\lim_{x\to\infty}\left(x-xe^{\frac{4}{x}}\right)=\infty-\infty$.

Rješenje. Prvo primijetimo da je $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}}=e^0=1$. Sada računamo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-xe^{\frac{4}{x}}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(1-e^{\frac{4}{x}}\right)=\infty\cdot 0=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{4}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{4}{x}}\cdot\frac{4}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-4\cdot\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4}{x}}=-4.$$

7.37

Izračunati: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{1-e^x}\right) = \infty - \infty$.

[**R:** $L = 1$ **–>** VIDEO]

7.4.4 Neodređeni oblik 1^∞, ∞^0

Kao što znamo iz 5. dijela gradiva da se neodređeni oblik 1^∞ algebarskim trikovima svodio na esencijalni limes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Međutim, sada pomoću L'Hospitalovog pravila smo u mogućnosti jednostavnije pristupiti ovom neodređenom obliku:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \implies$$

$$\lim_{x\to A} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to A} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to A}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)} ,$$

jer bez L'Hospitalovog teško smo mogli riješiti onaj limes u eksponentu : $\lim_{x\to A}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)$.

Isti ovaj trik primjenjujemo i na neodređeni oblik ∞^0 .

7.38

Izračunati: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x(5+x)}} = 1^\infty$.

Rješenje. Računamo:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x(5+x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x(5+x)}} = e^{\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}}(L'H)$$

$$= e^{\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} = e^{1/5}.\square$$

7.39

Izračunati: $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^3}} = 1^\infty$.

[**R:** $L = e^{-1/3}$ **–>** VIDEO]

7.40

Izračunati:

$\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\frac{2}{\cos x}} = 1^\infty$.

[**R:** $L = 1$ **–>** VIDEO]

7.5 Studentski i pro-fini zadaci

Na kraju ovog osmog dijela gradiva ćemo prikazati zadatke koji su predložili studenti FER-a u okviru predmeta Matematička analiza 1. Tko god ima zanimljiv zadatak zajedno s rješenjem i postupkom neka ga pokaže Profi ili **pofotkanog u privitku pošalje na email**: mervan.pasic@fer.hr i nakon pregleda će biti objavljen pod imenom i prezimenom dotičnog studenta. Istovremeno će Profa Memi isto tako ovdje zadaviti "pro-fine" zadatka:)

7.41 Za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je pravac $x + 2y - 6 = 0$ tangenta krivulje $x^2(y-1) + y^2 = a$.

[**R:** $a = \dfrac{31}{4}$ i $a = 8$]

7.42 Odrediti točku na elipsi $x^2 + 2y^2 = 2$ u I. kvadrantu u kojoj je tangenta na tu elipsu paralelna sa spojnicom točaka $A(\sqrt{2}, 0)$ i $B(0,1)$.

[**R:** $T_0\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; **->** **VIDEO**]

7.43 Funkcija $y = y(x)$ je implicitno zadana jednadžbom $3x^2y - 2y^3 + 2x^3 = 2$. Naći sve točke na $y = y(x)$ u kojima je tangenta paralelna s x-osi.

[**R:** $y' = \dfrac{2x(y+x)}{2y^2 - x^2}$ i $y' = 0$

$\Longrightarrow (0, -1)$ i $(\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2})$; **->** **VIDEO**]

7.44 Na koje od sljedećih funkcija je moguće a na koje nije moguće primijeniti Fermatov teorem na intervalu $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = x^2 + 3x - 1 \ \text{ i } \ f_3(x) = |x|.$$

[**R**. Iako je funkcija $f_1(x)$ diferencijabilna na $\mathbb{R}$ ona je strogo rastuća pa kao takva nema točku lokalnog ekstrema na $\mathbb{R}$ pa se ne može primijeniti Fermatov teorem na ovu funkciju. Na ovu se funkciju može primijeniti Fermatov teorem u tjemenu ove parabole $x_0 = -3/2$ u kojoj funkcija $f_2(x)$ postiže lokalni minimum; s druge strane nije teško vidjeti da je

$$\frac{df_2}{dx}(-3/2) = 0.$$

Na $f_3(x)$ se ne može primijeniti Fermatov teorem jer ova funkcija nije diferencijabilna u točki $x_0 = 0$ pa nije ona diferecijabilna niti na $\mathbb{R}$.]

DRUGI CIKLUS ☞ OVDJE